LEÇON 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I. Généralités et premiers exemples [Szp]

Cadre : G un groupe multiplicatif, d'élément neutre e.
X un ensemble.

1) Action de groupe

• déf : G agit à gauche (/à droite) sur X si on a une application :
$$G\times X \longrightarrow X \qquad (g,x)\longmapsto g\cdot x \quad (/\ x\cdot g)$$
telle que
- $\forall x\in X,\ e\cdot x = x \quad (/\ x\cdot e = x)$
- $\forall g,g'\in G,\ g\cdot(g'\cdot x) = gg'\cdot x \quad (/\ (x\cdot g)\cdot g' = x\cdot gg')$

On considèrera des actions à gauche dans la suite.

Rq : il équivalent de se donner le morphisme suivant :
$$\varphi : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X) \qquad g \longmapsto \{x\mapsto g\cdot x\}$$

[Cat] p12 → exples : - G agit sur G par translation $(g\cdot x = gx)$
par conjugaison $(g\cdot x = gxg^{-1})$
- G agit sur $\mathcal{P}(G)$ par translation $(g\cdot S = gS)$
- G agit sur G/H par translation où $H<G$ $(g\cdot xH = gxH)$
- $\mathfrak{S}_n$ agit sur $\{1,\dots,n\}$ de façon naturelle
[Pe] p14 - $\forall \sigma\in\mathfrak{S}_n$, $\langle\sigma\rangle$ agit de la même façon sur $\{1,\dots,n\}$

• déf : - on appelle orbites de X sous G les classes d'équivalence associées à la relation : $(x\mathcal{R}y)\Leftrightarrow(\exists g\in G \mid y=g\cdot x)$
On note $\mathrm{Orb}(x)$ l'orbite de $x\in X$. On obtient une partition de X.
- une action est dite transitive si il y a une seule orbite
i.e $\forall x,y\in X,\ \exists g\in G \mid y = g\cdot x$
- une action est dite fidèle si $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{e\}$
i.e $(\forall x\in X\ g\cdot x = x)\Rightarrow(g=e)$
- on appelle stabilisateur de $x\in X$ le sous-groupe de G tel que $\mathrm{Stab}(x) = \{g\in G \mid g\cdot x = x\}$
- on dit que x est un point fixe pour l'action si $\mathrm{Stab}(x) = G$

[Pe] - - - → On note $X^G = \{x\in X \mid \forall g\in G\ g\cdot x = x\}$ l'ensemble des points fixes de X sous G.

Rq : - $\mathrm{Ker}\,\varphi = \bigcap_{x\in X}\mathrm{Stab}(x)$.
- on définirait de même la k-transitivité en considérant des k-uplets.

→ exples : - l'action induite par G sur $\mathrm{Orb}(x)$ est transitive.
- l'action de G sur G par translation est fidèle.
- l'action de G sur G/H avec $H\triangleleft G$ n'est pas fidèle
- Pour l'action de G sur G par conjugaison :
× $\mathrm{Orb}(g)$ est appelé classe de conjugaison
× $\mathrm{Stab}(g)$ est appelé centralisateur de g (noté $C_G(g)$)
- l'action de $G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ sur X est fidèle
- Pour l'action de $\langle\sigma\rangle$ (où $\sigma\in\mathfrak{S}_n$) sur $\{1,\dots,n\}$ les orbites correspondent aux supports des cycles dans la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoints. [??]
- l'action de A_n sur $\{1,\dots,n\}$ est $(n-2)$ fois transitive $(n\geq 4)$ par conjugaison [Pe] p16

2) Formule des classes et lemme de Burnside

Précisons le lien entre orbite et stabilisateur de $x\in X$ sous G.

• Prop : il existe une bijection entre $G/\mathrm{Stab}(x)$ et $\mathrm{Orb}(x)$.
• Cor : Si $|G|,|X|<+\infty$ alors $|\mathrm{Orb}(x)|$ divise $|G|$
• Prop : Les stabilisateurs de 2 éléments d'une même orbite sont conjugués. [Gm] p43
• Prop : [Equation aux classes]
$$|X| = \sum_{i=1}^{r}|\mathrm{Orb}_i| \quad \text{où } r \text{ est le nombre d'orbite de } X \text{ sous } G$$
$$= |X^G| + \sum_{|\mathrm{Orb}(x)|\geq 2}|\mathrm{Orb}(x)|$$

Applications : - Thm : [de Cauchy] G groupe tel que $|G|<+\infty$, p premier divisant $|G|$. [Gm] p28
Alors $\exists g\in G$ d'ordre p.
- Thm : [Wedderburn] tout corps fini est commutatif [Pe] p82
- aux groupes dans la partie II.1)

- **déf :** on pose $\forall g \in G$, $Fix(g) := \{x \in X, g\cdot x = x\}$
  On a donc $X^G = \bigcap_{g\in G} Fix(g)$

- **Prop :** [Formule de Burnside]
  $|G|, |X| < +\infty$
  On note r le nombre d'orbites de X sous l'action de G :
  $$r = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} Fix(g)$$

II. Application à la théorie des groupes [S≠p]

1) Action de G sur lui-même par conjugaison

- **déf :** Le centre du groupe G (quelconque) est :
  $Z(G) := \{x \in G, \forall g \in G \; xg = gx\} \triangleleft G$

  Rq : - G abélien $\Rightarrow Z(G) = G$
  - $Z(G) = G^G$

- **Prop :** L'équation aux classes devient $|G| = |Z(G)| + \sum_{|Orb(g)|\geq 2} |Orb(g)|$ lorsque $|G| < +\infty$

  Applications : - si G est un p-groupe alors $|Z(G)| \equiv 0\,[p]$ et donc $Z(G) \neq \{e\}$.
  ↳ tout groupe d'ordre p^2 est abélien

  [Szi] p 27 - - - - - - ↳ $(|G| = p^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow (\forall\, 0 \leq m \leq \alpha \;\; \exists H < G$ d'ordre $p^m)$

2) Action de G sur lui-même par translation à gauche

- **Thm :** [de Cayley]
  Tout groupe (pas forcément fini !) est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations.
  De plus, $(|G| = n) \Rightarrow$ ~~(...)~~ G isomorphe à un s-groupe de S_n

- Considérons l'action de G sur G/H $(H < G)$ par translation à gauche.
  × **Prop :** $Ker\,\varphi = \bigcap_{g\in G} gHg^{-1}$

  × **Applications :** - G groupe infini, $H \lneq G$ d'indice fini [Pe] p17
  Alors G n'est pas simple

  - **Thm :** [de Frobenius] [X-ENS], p 52
  $H < G$, $|G| < \infty$ tq $|G| = p\cdot|H|$
  où p est le plus petit diviseur premier de $|G|$
  Alors $H \triangleleft G$

3) Théorème de Sylow [Pe] p18

Cadre : G groupe fini, on va utiliser son action sur ses p-Sylow.

- **déf :** Soit G un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$ premier.
  On appelle p-Sylow de G un sous-groupe de cardinal p^α.

- **Thm :** [de Sylow] Dev^t 1
  G groupe fini d'ordre $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$ premier
  Alors - il existe au moins un p-Sylow
  - tout p-sous groupe de G est contenu dans un p-Sylow de G
  - les p-Sylow sont conjugués
  - soit n_p le nombre de p-Sylow :
  $n_p \equiv 1\,(p)$ et $n_p \mid m$.

Rq : le théorème de Cauchy nous donnait l'existence du plus petit p-sous-groupe de G pour l'inclusion.

- **Cor :** un p-Sylow est unique ssi il est distingué dans G

Applications : - non simplicité d'un groupe
→ exples : $|G| = 63 \Rightarrow G$ pas simple
$|G| = 45 \Rightarrow G$ pas simple - [S≠p]

- détermination de groupes à partir de leur cardinal :
  - → groupe d'ordre 8 : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, D_4, Q_8
  - → groupe d'ordre pq ($p\wedge q=1$) : $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\rtimes\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

[Gou]

III. Applications en algèbre linéaire et en algèbre commutative

1) En algèbre linéaire

Cadre : $\mathbb{K}$ corps commutatif, $p,q,n\in\mathbb{N}$

- Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$ par conjugaison : $P.M = PMP^{-1}$

  Les orbites sont caractérisées par les invariants de similitude

  Système de représentants : $\left\{ \begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} s\in[\![1,n]\!] \\ P_s\mid\dots\mid P_1\in\mathbb{K}[X] \\ \text{unitaires et non cstes} \end{array} \right\}$

- Action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par conjugaison/congruence :

  $P.M = PM{}^tP = PMP^{-1}$

  Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ les valeurs propres de $M\in S_n(\mathbb{R})$ on a le système de représentants : $\left\{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix},\ \lambda_i\le\lambda_j\right\}$

  Applications : - existence d'une unique racine carrée d'un endomorphisme autoadjoint positif
  - Thm de pseudo-réduction simultanée

  Rq : de même $U_n(\mathbb{C})$ agit sur $H_n(\mathbb{C})$: $P.M = PM{}^t\bar{P}$

- $GL_p(\mathbb{K})\times GL_q(\mathbb{K})$ agit sur $M_{pq}(\mathbb{K})$ par équivalence :

  $(P,Q).M = PMQ^{-1}$

  Les orbites sont caractérisées par le rang.

  Système de représentants : $\left\{J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ r\in[\![0,n]\!]\right\}$

- Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$: $M(d,d') = (M.d\,;M.d') = (M(E_1),\dots,M(E_n);M(E_1'),\dots,M(E_n'))$ [Cal] p 167

  $\mathcal{D}$ désigne l'ensemble des drapeaux complets de $\mathbb{K}^n$

  Il y a $n!$ orbites caractérisées par les matrices $\{P_\sigma,\ \sigma\in S_n\}$

- Action de $PSL_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$: $M.z = \frac{az+b}{cz+d}$ où $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\det M=1$ [Alé] p61

  Prop : $\mathcal{D}=\{z\in\mathbb{H},\ |\mathrm{Re}\, z|\le 1/2 \text{ et } |z|\ge 1\}$ est un domaine fondamental de l'action de $\langle S,T\rangle$ sur $\mathbb{H}$ où $S=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

  Application : $SL_2(\mathbb{Z})=\langle S,T\rangle$

- Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$ par congruence [Alé] p160

  Application : tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ [H-T] p23

- $GL_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$ [Gez] p13

2) Action sur $A[X_1,\dots,X_n]$ où A un anneau commutatif unitaire

S_n agit sur $A[X_1,\dots,X_n]$: $(\sigma.P)(X_1,\dots,X_n) = P(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(n)})$

- Déf : l'ensemble des polynômes symétriques est $A[X_1,\dots,X_n]^{S_n}$.

IV. Applications en géométrie

1) Cadre : espace euclidien E de dim ≥ 2 [Tau] p 34

(corps : $\mathbb{R}$)

- Prop : $SO(E)$ agit transitivement sur $S=\{x\in E,\ \|x\|=1\}$
- Prop : En notant $\mathcal{D}:=\{\text{droites vectorielles}\}$, si dim $E\ge 3$ alors $O(E)$ et $SO(E)$ ont les mêmes orbites dans $\mathcal{D}^2$ ($g.(D_1,D_2)=(g(D_1),g(D_2))$)
- déf : On appelle angle non orienté de $D_1,D_2\in\mathcal{D}$ l'orbite de (D_1,D_2) sous l'action de $O(E)$

les angles o. n'existent pas dans $\mathbb{R}^3$ (corps commutatif qcq)

2) Cadre : espace affine euclidien [Mer] p10

- déf : $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E si $(E,+)$ agit transitivement et fidèlement sur $\mathcal{E}$. Il est euclidien si E l'est ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$).
- Thm : $\mathcal{E}=\mathbb{R}^3$ espace affine euclidien [Alé] p64

  Le groupe des isométries du cube est $\mathrm{Isom}\, C_8\cong S_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Dev 2

[Pe] Perrin _ Cours d'algèbre

[Cal] Calais _ Eléments de théorie des groupes

[Com] Combes _ Algèbre et géométrie

[Gou] Gourdon _ "Algèbre"

[Tau] Tauvel _ "Géométrie"

[Mer] Mercier _ "Fondamentaux de géométrie pour les concours"

[X ENS], Oraux X ENS Algèbre 1

[Ale] Alessandri _ Thèmes de géométrie, groupes en situation géométrique

[M-T] Mneimné Testard _ "Intro à la théorie des Groupes de Lie classiques"

[Goz] Gozard _ Théorie de Galois