101

Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications

I Définitions et premières propriétés

On notera dans cette leçon : – G un groupe noté multiplicativement
– X un ensemble.

① Action de groupe.

Déf 1 Une action de G sur X (notée $G \curvearrowright X$) est une application $G \times X \to X$, $(g,x) \to g \cdot x$ telle que :

$$\begin{cases} \forall g_1, g_2 \in G, \forall x \in X, \\ g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x \\ e \cdot x = x \end{cases}$$

Remarques 2 • Cela revient à se donner un morphisme $\varphi : G \to \sigma(X)$, où $\sigma(X)$ est l'ensemble des bijections de X.

• Si $H < G$ (sous groupe de G), H agit sur X par $\varphi_{|H}$.

Exemples 3 • $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $G = S_n$. Alors $G \curvearrowright X$ via $\sigma \cdot i = \sigma(i)$

• $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}^n$ par $M \cdot x = Mx$

Déf 4 $G \curvearrowright X$
- transitivement si $\forall (x,y) \in X^2, \exists g \in G, g \cdot x = y$
- simplement transitivement si — $\exists ! g \in G, g \cdot x = y$
- fidèlement si φ est injectif
- n-transitivement si : $\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ tels que $\forall i \neq j, x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$, alors $\exists g$ t.q $\forall i$ $g \cdot x_i = y_i$

Rem 5 simplement transitif $\Rightarrow$ fidèle

Exemples 6 • $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright GL_n(\mathbb{C})$ par multiplication à gauche et l'action est simplement transitive

• S_n (resp. A_n) agit n-transitivement (resp. $(n-2)$-transitivement) sur $X = \{1, \dots, n\}$.

Déf 7 • $\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x, g \in G\}$ orbite de x pour l'action de G
• $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ est le stabilisateur de x (x fixé)
• $\mathrm{Fix}_X(g) = \{x \in G \mid g \cdot x = x\}$ ensemble des points fixes de X pour g
• $X^G = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}_X(g)$ l'ensemble des points fixes pour G.

Prop 8 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \bigcap_{x \in X} G_x$

Exemple 9 Décomposition de permutations en cycles disjoints.
Pour $\sigma \in S_n$, $\langle \sigma \rangle \curvearrowright \{1, \dots, n\}$ (car $\langle \sigma \rangle < S_n$)
Soient $F_1, \dots, F_r$ les orbites de $\{1, \dots, n\}$. Alors $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_r$
où $\forall i = 1, \dots, r$, $\sigma_i(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \notin F_i \\ \sigma(x) \text{ si } x \in F_i. \end{cases}$

Application 10 Si $n = 8$ et $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 8 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

on a $\sigma = (1\,3\,4\,5)(2\,6\,8)(7)$.

② Action d'un groupe fini sur un ensemble fini

Prop 11 $G/G_x \to \mathcal{O}_x$ est une bijection
$\bar{g} \to g \cdot x$

En particulier, si G et X sont finis, $|G/G_x| = |\mathcal{O}_x|$

Déf 12 On définit une relation d'équivalence sur X par $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G$ t.q $y = g \cdot x$.

Conséquence : $X = \bigcup_{x \in X/\sim} \mathcal{O}_x$

Prop 13 (formule des classes)

$$|X| = \sum_{x \in X/\sim} |\mathcal{O}_x| = |X^G| + \sum_{\substack{x \in X/\sim \\ |\mathcal{O}_x| \geq 2}} |G/G_x|$$

Applications 14 • Théorème de Wedderburn (DVP).

• Lemme de Burnside : $|X/_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix_X(g)|$

• Thm de Cauchy : Si p premier divise $|G|$. Alors G contient un élément d'ordre p.

Corollaire 15 Soit p premier
Soit G un p-groupe ($|G| = p^\alpha, \alpha \geq 0$),
Alors $|X^G| \equiv |X| \ (p)$

II Groupe agissant sur lui-même

① Action par multiplication à gauche

Def 16 $G \curvearrowright G$ via $\forall g, h \in G, \ g.h = gh$

Prop 17 Cette action est fidèle et simplement transitive

Application 18 Thm de Cayley
$|G| < +\infty$, G est isomorphe à un sous-groupe de S_n (pour $n = |G|$)

② Action par conjugaison

Def 19 $G \curvearrowright G$ via $\forall g, h$, $g.h = ghg^{-1}$

Rem 20 $X^G = Z(G)$ le centre de G

Exemple 21 2 permutations sont conjuguées dans S_n ssi elles ont le même type.

Def 22 On dit G est simple s'il n'a aucun sous groupe distingué autre que $\{1\}$ et lui-même.

Thm 23 A_n est simple pour $n \geq 5$ (DVP)

Prop 24 Soit G p-groupe. Si $G \neq \{1\}$, alors $|Z(G)| > 1$

Application 25 • G p-groupe et $|G| = p^2 \Rightarrow G$ abélien

③ Théorème de Sylow

Def 26 Soit G fini de cardinal n et p premier, $p|n$.
Si $n = p^\alpha m$ avec $p \nmid m$, on appelle p sous-groupe de Sylow de G un sous groupe d'ordre p^α.

Exemple 27 Soit $G = GL_n(\mathbb{F}_p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, p premier
On a $|G| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1}) = m \, p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ avec $p \nmid m$.
Alors l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes
$P = \{ A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i > j \text{ et } a_{ii} = 1 \}$
est un p-sous groupe de Sylow de G (car $|P| = p^{\frac{n(n-1)}{2}}$)

Théorème 28 (Sylow)
Soit G tel que $|G| = p^\alpha m$, avec $p \nmid m$.
1) Si $H < G$ est un p-groupe, il existe un p-Sylow S, avec $H \subset S$.
2) Les p-Sylow sont tous conjugués (et donc leur nombre k divise m)
3) On a $k \equiv 1 \ (p)$ (donc $k | m$).

Corollaire 29 Si S est un p-Sylow de G, on a :
$S \triangleleft G \Leftrightarrow S$ est l'unique p-Sylow de $G \Leftrightarrow k = 1$.

Application 30 • Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple
• G p-groupe et $|G| = p^\alpha$, alors $\forall i \leq \alpha$, il existe un sous groupe de G d'ordre p^i.

III Action de groupe et algèbre linéaire

1) Action sur des matrices

Def 31 (Action de Steinitz)

$GL_n(\mathbb{C}) \times GL_p(\mathbb{C})$ agit sur $M_{n,p}(\mathbb{C})$ par :
$(P, Q).M = PMQ^{-1}$

Def 32 2 matrices appartenant à la même orbite sont dites **équivalentes**.

Prop 33 Les matrices $J_r = \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{xx}}^{r} & \overbrace{\hphantom{xx}}^{p-r} \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & (0) \\ \hline (0) & \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, n-r \end{array} \end{array}$ forment un système de représentants des orbites de cette action.

Applications 34 – $\forall A \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $rg(A) = rg({}^tA)$
– $GL_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Def 35 Action par conjugaison de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $M_n(\mathbb{C})$

$$GL_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$$
$$(P, M) \longmapsto PMP^{-1}$$

Def 36 2 matrices dans une même orbite sont dites semblables.

Remarque 37 Soient B, B' base de $\mathbb{C}^n$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $M = \underset{B}{Mat}\, u$.
Alors si $P = P_{BB'}$, $P^{-1}.M.P = \underset{B'}{Mat}\, u$

Ainsi, s'intéresser aux représentant "simples" de l'orbite de M revient à trouver des bases de réduction de u.

Exemples 38 – Bases de diagonalisation, trigonalisation.
– Réduction de Jordan.

2) Action sur les Espaces vectoriels

Def 39 (Représentation d'un groupe).
Soient E un e.v, G un groupe. Une action $G \times E \to E$ t.q $\varphi : G \to GL(E) \subsetneq \mathfrak{S}(E)$ est une représentation de G

Exemple 40 Représentation régulière d'un groupe :
Soit E $\mathbb{C}$-ev de base $(e_g)_{g\in G}$.
Alors on définit $\varphi(s)$ par $\varphi(s)(e_g) = e_{sg}$, $\forall s \in G$, $\forall g \in G$

3) Action sur un espace de polynômes

On pose $GL_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ par $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$
$$(A, P) \longmapsto A.P = P(A^{-1}(X_1, \dots, X_n))$$

Rem 41 L'ensemble des polynômes de degré d, V_d, est stable par cette action.
Si $G < GL_n(\mathbb{C})$ est fini, $G \curvearrowright V_d$ et

Thm 42 (Thm de Molien) :
$$\frac{1}{|G|} \sum_{A\in G} \frac{1}{\det(I - tA)} = \sum_{d \geq 0} \dim(V_d^G)\, t^d$$

IV Application des actions de groupe à la géométrie

1) Espace affine

Def 43 Un ensemble $\mathcal{E}$ sur lequel agit le groupe additif $(E, +)$ d'un e.v, simplement transitivement est appelé Espace affine

2) Groupes d'isométrie

- Le groupe diédral D_n ($n \geq 1$) : pour $n = 5, 8$, voir figures
  On a $D_n \simeq \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$
- Le groupe des isométries du cube : $G = \mathfrak{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Références : – Combes, Algèbre et géométrie

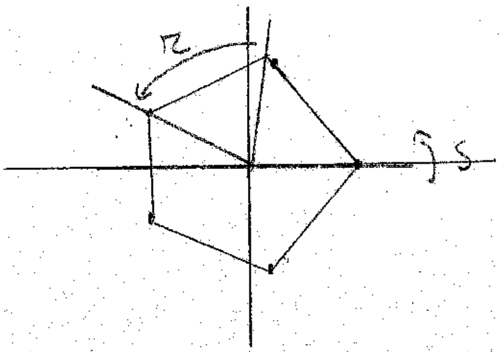
– Perrin, Cours d'algèbre (presque essentiellement cela pour I, II).

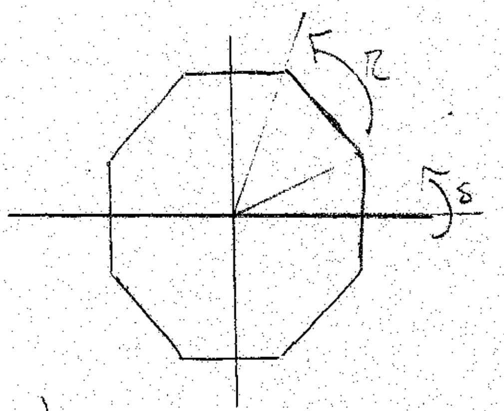
– Gourdon, Algèbre

– Serre, Représentation de groupes finis

– Leichtnamm (pour le thm de Molien).

Groupe diédral: D_5





Groupe des isométrie du cube :