# Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient (103)

$(G,\cdot)$ sera un groupe d'élément neutre $e$ et $H$ un sous-groupe de $(G,\cdot)$

## I - Outils pour la classification des groupes

### 1) Sous-groupes distingués et groupe quotient

Def : On définit les relations d'équivalences $\sim_H$ et ${}_H\!\sim$ sur $G$ par

$x \sim_H y \iff x^{-1}y \in H \iff y \in xH$

$x \;{}_H\!\sim y \iff xy^{-1} \in H \iff y \in Hx$

Th (Lagrange) : Si $|G| < +\infty$ alors $|G| = [G:H]\,|H|$

Prop : $\sim$ est une relation d'équivalence sur $G$ compatible avec $\cdot$ si et seulement si il existe $H$ un sous-groupe de $G$ tel que $\sim = \sim_H = {}_H\!\sim$

Dans ce cas on note $G/H = G/\sim_H = G/{}_H\!\sim$

Def : On dit que $H$ est distingué dans $G$ ($H \lhd G$) si $\sim_H = {}_H\!\sim$

Prop : $H \lhd G \iff \forall x \in G\ \ Hx = xH \iff x^{-1}Hx \subset H$

Ex : 1) $\{e\}$ et $G$ sont distingués dans $G$

2) Si $G$ est abélien alors tout sous groupe de $G$ est distingué.
Réciproque fausse : $\mathbb{H}_8$

3) $[G:H] = 2 \Rightarrow H \lhd G$

4) $\lhd$ est non transitive : Dans $S_4$ on a $\{e,(12)(34)\} \lhd V_4$ et $V_4 \lhd A_4$ mais on n'a pas $\{e,(12)(34)\} \lhd A_4$

Prop : 1) $H \lhd G \iff \exists f : G \to G'$ morphisme tel que $H = \ker f$

2) Si $f : G \to G'$ morphisme alors $G/\ker f \simeq \mathrm{Im} f$

3) Si $H \lhd G$ alors $K$ est un sous-groupe de $G/H \iff \exists N,\ H \subset N$ et $K = N/H$

Pour $H \lhd G$, l'étude de $H$ et $G/H$ donne des informations sur $G$.

### 2) Groupes simples

Def : $G$ est simple s'il possède exactement deux sous-groupes distingués

Prop : 1) Si $G$ est abélien alors $G$ simple $\iff |G|$ est premier

2) Si $G$ est non abélien et simple alors $Z(G) = \{e\}$ et $D(G) = G$

Ex : 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n$ simple $\iff n = 3$ ou $n \geq 5$

2) $PSL_n(K)$ simple $\iff n \neq 2$ ou ($K \neq \mathbb{F}_2$ et $K \neq \mathbb{F}_3$)

Rq : Il existe une classification des groupes finis simples

### 3) Produit semi-direct

Etant donnés $H$ et $N$ deux groupes on cherche des groupes $G$ vérifiant $1 \to N \to G \to H \to 1$

Def : $N \times H$ muni de la loi $(n_1,h_1).(n_2,h_2) = (n_1n_2, h_1h_2)$ est un groupe vérifiant $1 \to N \to N\times H \to H \to 1$ et $H \lhd N \times H$

Lemme (Chinois) Si $p \wedge q = 1$ $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$

Th (Classification des groupes finis abéliens)
Si $G$ est un groupe fini abélien, alors $\exists (d_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{Z}^n$ vérifiant $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$, $d_i \mid d_{i+1}$ et $G \simeq \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$

Def : Soit $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ un morphisme. On note $N \rtimes_\varphi H$ le groupe $(N\times H, \cdot)$ muni de la loi $(n_1,h_1).(n_2,h_2) = (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2)$

Prop : 1) $1 \to N \to N \rtimes_\varphi H \to H \to 1$

2) $N\times\{e\} \lhd N \rtimes_\varphi H$ ; $N\times\{e\} \cap \{e\}\times H = \{e\}$ ; $(N\times\{e\})(\{e\}\times H) = N \rtimes_\varphi H$

Prop : Si $N$ et $H$ sont deux sous-groupes de $G$ vérifiant
1) $N \lhd G$
2) $N \cap H = \{e\}$
3) $G = NH$

alors $G \simeq N \rtimes_\varphi H$ avec $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, $h \mapsto h\, \mathrm{id}_N\, h^{-1}$

103

Ex : $S_n \simeq A_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

avec $\varphi(\bar{1}) = (\sigma \mapsto (12)\sigma(12))$ $\quad \psi(\bar{1}) = (g \mapsto g^{-1})$

Prop : Soit $H$ et $N$ sont deux groupes et $\varphi : H \to Aut(N)$ un morphisme

Si $G = N \rtimes_\varphi H$ alors les assertions suivantes sont équivalentes

1) $\varphi$ est trivial (ie $\forall h \in H$, $\varphi(h) = id_N$)

2) $\{e\} \times H \triangleleft G$

3) $G = N \times H$ en tant que groupe

Ex : $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rtimes_\varphi H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times H$ et $\varphi$ non trivial $\Rightarrow N \rtimes_\varphi H$ non abélien

Rq : Pour $\varphi$ non trivial on a $S_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq S_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Application : 1) Classification des groupes d'ordre $\leq 11$ [DVPT]

2) Si $p < q$ premiers. Tout groupe d'ordre $pq$ est

- soit cyclique si $q-1 \notin p\mathbb{Z}$
- soit isomorphe à $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\varphi$ non trivial si $q-1 \in p\mathbb{Z}$

## II - Simplicité du groupe spécial linéaire projectif

### 1) Premières propriétés

$K$ désignera un corps commutatif

Prop : $1 \to SL_n(K) \to GL_n(K) \to K^* \to 1$

et $GL_n(K) \simeq SL_n(K) \rtimes_\varphi K^*$

avec $\varphi : K^* \longrightarrow \boxed{Aut(SL_n(K))}$

$\lambda \longmapsto \cancel{\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} id_{SL_n(K)} \begin{bmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$\varphi_\lambda : M \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1/\lambda & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Def : $A \in GL_n(K)$ est une transvection élémentaire si $A = I_n + \lambda E_{ij}$, $\lambda \in K^*$, $i \neq j$

Th : $SL_n(K)$ est engendré par les transvections élémentaires

Prop : $Z(GL_n(K)) = \{\lambda I_n, \lambda \in K^*\}$ et $Z(SL_n(K)) = \{\lambda I_n, \lambda^n = 1\}$

Th : 1) Si $n \neq 2$ ou $K \neq \mathbb{F}_2$ alors $D(GL_n(K)) = SL_n(K)$

2) Si $n \neq 2$ ou ($K \neq \mathbb{F}_2$ et $K \neq \mathbb{F}_3$) alors $D(SL_n(K)) = SL_n(K)$

Def : On définit $PSL_n(K)$ comme le quotient $SL_n(K)/Z(SL_n(K))$

### 2) Le cas $n = 2$

Prop : Si $T$ est le groupe des matrices triangulaires supérieures de $GL_2(K)$, $T \cap SL_2(K)$ est un sous-groupe propre maximal de $SL_2(K)$

Th : $PSL_2(K)$ est simple si et seulement si $|K| \geq 4$

Prop : $PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ et $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$

### 3) Le cas $n \geq 3$

Def : On dit que $T \in GL_n(K)$ est une transvection si $T$ est semblable à la matrice $I_n + E_{12}$

Th : Si $n \geq 3$, les transvections sont conjuguées $SL_n(K)$

Lemme : Les transvections élémentaires sont des transvections

Cor : $SL_n(K)$ est engendré par les transvections

Th : Si $n \geq 3$, $PSL_n(K)$ est simple.

Cor : Si $n \geq 3$, $SL_n(K)$ n'est pas résoluble

## III - Suites de composition

### 1) Groupes résolubles

Déf : Une suite de composition de $G$ est une suite finie $(G_i)_{i\in[\![0;m]\!]}$ de sous-groupes de $G$ vérifiant $G=G_0$, $G_m=\{e\}$ et $\forall i\in[\![0;m-1]\!]$, $G_{i+1}\triangleleft G_i$

Ex : $\{e\}\triangleleft V_4\triangleleft A_4\triangleleft S_4$

Déf : On dit que $G$ est résoluble s'il admet une suite de composition $(G_i)$ dont tous les quotients $G_i/G_{i+1}$ sont abéliens

Prop : $D(G)\triangleleft G$ et si $H\triangleleft G$ alors $G/H$ abélien $\Leftrightarrow D(G)\subset H$

Th : $G$ est résoluble $\Leftrightarrow \exists m\in\mathbb{N}$ tel que $D^m(G)=\{e\}$ avec $D^0(G)=G$ et $\forall m\in\mathbb{N}$ $D^{m+1}(G)=D(D^m(G))$

Rq : Si $m\geq 5$, $S_m$ n'est pas résoluble car $D(S_m)=A_m$ et $A_m$ est simple et non abélien

Ex : 1) les groupes abéliens sont résolubles
2) Les groupes diédraux sont résolubles

Th : $G$ est résoluble $\Leftrightarrow \exists N\triangleleft G$ tel que $N$ et $G/N$ soient résolubles

### 2) Groupes nilpotents

Déf : On appelle suite centrale ascendante de $G$ la suite croissante $(Z_k(G))_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $Z_0(G)=\{e\}$ et $\forall k\geq 0$ $Z_{k+1}(G)$ est l'unique sous-groupe $S$ de $G$ contenant $Z_k(G)$ et vérifiant $S/Z_k(G)=Z(G/Z_k(G))$

Déf 1) $G$ est nilpotent si $\exists k\geq 0$ tel que $Z_k(G)=G$
2) La classe de nilpotence de $G$ le plus petit entier $k$ vérifiant $Z_k(G)=G$

Ex : 1) Tout $p$-groupe est nilpotent
2) Si $G$ est nilpotent de classe 1 ou 2 alors $\forall (a,b,c)\in G^3$, on a $[ab,c]=[a,c][b,c]$ et $[a,bc]=[a,b][a,c]$

Th : Tout groupe nilpotent est résoluble

Rq : La réciproque est fausse : $S_3$ et $S_4$ sont résolubles mais pas nilpotents

### 3) Théorème de Jordan - Hölder

Déf : Une suite de composition de $G$ est dite de Jordan-Hölder si tous ses quotients $G_i/G_{i+1}$ sont des groupes simples

Ex : $\{e\}\triangleleft A_5\triangleleft S_5$ est une suite de Jordan-Hölder

Déf : Soit $(G_i)_{i\leq m}$ et $(K_j)_{j\leq p}$ des suites de composition de $G$.
1) $(K_j)_{j\leq p}$ est un raffinement de $(G_i)_{i\leq m}$ si $p\geq m$ et si $\exists \varphi:[\![0;m]\!]\to[\![0;p]\!]$ tel que $\forall i\in[\![0;m]\!]$, $G_i=K_{\varphi(i)}$
2) $(G_i)_{i\leq m}$ et $(K_j)_{j\leq p}$ sont équivalentes si $m=p$ et si $\exists\sigma\in S_m$ tel que $\forall i\in[\![0;m]\!]$ $G_i/G_{i+1}\simeq K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)+1}$

Th : (Schreier) : Deux suites de composition de $G$ admettent des raffinements équivalents

Lemme (Zassenhaus) : Si $H_1\triangleleft H_2$ et $K_1\triangleleft K_2$ alors $H_1(H_2\cap K_1)\triangleleft H_1(H_2\cap K_2)$, $K_1(H_1\cap K_2)\triangleleft K_1(H_2\cap K_2)$ et $\dfrac{H_1(H_2\cap K_2)}{H_1(H_2\cap K_1)}\simeq\dfrac{K_1(H_2\cap K_2)}{K_1(H_1\cap K_2)}$

Th (Jordan-Hölder) : Deux suites de Jordan-Hölder sont équivalentes [DVPT]

**Références :** McLane, Birkhoff, Algebra
Josette Calais
Daniel Perrin
Serge Lang
Rotman.