106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

1

E désigne un k-espace vectoriel de dimension finie n

I GL(E)

1/ Définitions

Déf: Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des endomorphismes (k-linéaires) bijectifs de E sur E.

Prop: Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
Alors $f \in GL(E)$ ssi f envoie une base de E sur une base de E.
Un élément de $GL(E)$ représente donc un changement de base.

Prop: Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
Alors on a l'équivalence entre:
i) f injectif ii) f surjectif iii) f bijectif

Prop: Un endomorphisme $f : E \to E$ est bijectif ssi son déterminant est inversible.
Le déterminant $\det : GL(E) \to k^*$ est un morphisme de groupes.

Déf: On appelle groupe spécial linéaire l'ensemble $SL(E)$ des endomorphismes de déterminant 1.
En tant que noyau du déterminant, c'est un sous-groupe distingué de $GL(E)$.

Prop: La donnée d'une base de E induit un isomorphisme de $GL(E)$ sur $GL_n(k)$ le groupe des matrices $n \times n$ inversibles à coefficients dans k.

Rq: Cet isomorphisme permet d'utiliser le calcul matriciel pour étudier $GL(E)$.

2/ Premières propriétés et exemples

Prop: On peut calculer le cardinal de $GL_n(k)$:
* si k est infini: $|GL_n(k)| = |k|$
* si k est fini de cardinal $q = p^e$ on a:

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q-1)\, q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$$

App°: $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-groupe de $SL_n(\mathbb{F}_q)$ de cardinal $q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. C'est donc un p-Sylow de SL_n (et de GL_n).

Rq: Les matrices de permutation et le théorème de Cayley fournissent une injection de tout groupe fini G dans le groupe linéaire.

106

$$G \hookrightarrow \mathfrak{S}_{|G|} \hookrightarrow GL_{|G|}(k)$$

Avec l'application précédente on peut en déduire une preuve du théorème de Sylow.

Ex: $GL(E)$ agit naturellement sur $E \setminus \{0\}$. Cette action est transitive.

Ex: $GL_n(k)$ agit par conjugaison sur lui-même. Quand k est algébriquement clos la réduction de Jordan permet de trouver un représentant "simple" de chaque orbite. Dans le cas général on peut utiliser la réduction de Frobenius.

3/ Générateurs et sous-groupes dérivés

Déf: Soit $u \in GL(E)$ possédant exactement un hyperplan de points fixes. Si $\det u = 1$ on dit que u est une transvection, sinon on dit que u est une dilatation.

Prop: Soit $h \in GL(E)$ avec exactement un hyperplan de points fixes. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de h est:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ si h est une transvection

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$ si h est une dilatation (alors $\lambda = \det u$)

Lemme: Notons $\tau_{a,f}$ la transvection donnée par $\tau_{a,f}(x) = x + f(x)a$ ($f \in E^* \setminus \{0\}$, $a \in E \setminus \{0\}$, $x \in E$)
Pour $u \in GL(E)$ on a alors:

$$u \tau_{a,f} u^{-1} = \tau_{f \circ u^{-1}, u(a)}$$

App° [calcul des centres]:

$$Z(GL(E)) = \{\lambda Id \mid \lambda \in k^*\} \simeq k^*$$
$$Z(SL(E)) = SL(E) \cap Z(GL(E)) \simeq \{\lambda \in k^* \mid \lambda^n = 1\} = \mu_n(k)$$

Thm [générateurs]:
L'ensemble des transvections engendre $SL(E)$.
L'ensemble des transvections et des dilatations engendre $GL(E)$.

Appl°[groupes dérivés] :
* $\mathcal{D}(GL_n(k)) = SL_n(k)$ sauf si $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 2$
* $\mathcal{D}(SL_n(k)) = SL_n(k)$ sauf si $k = \mathbb{F}_2$ et $n = 2$ ou 3

II) Groupes remarquables

1/ Groupes projectifs

On a vu que les centres de GL et SL ne sont pas triviaux. En quotientant par ceux-ci on obtient des groupes fondamentaux en théorie des groupes.

<u>Déf</u> : les **groupes projectifs** linéaire et spécial linéaire sont : $PGL_n(k) = GL_n(k)/k^*$ $\quad PSL_n(k) = SL_n(k)/\mu_n(k)$

<u>Prop</u> : $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{q-1}$ et $|PSL_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{(q-1)\,\mathrm{pgcd}(n,q-1)}$

<u>Ex</u> [d'isomorphismes exceptionnels] :
* $PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ * $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$ * $PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
* $PSL_2(\mathbb{F}_7) \simeq PSL_3(\mathbb{F}_2) \to$ groupe simple d'ordre 168

<u>Thm</u> : $PSL_n(k)$ est simple, sauf si $n = 2$ et $k = \mathbb{F}_2$ ou $\mathbb{F}_3$.

2/ Groupe orthogonal

<u>Déf</u> : Soit $q : E \to k$ une forme quadratique ($q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ et $q(x+y) - q(x) - q(y)$ bilinéaire).
Le groupe orthogonal de E associé à q, $O(q)$, est l'ensemble des endomorphismes $f \in GL(E)$ tels que $q(f(x)) = q(x)$ pour tout $x \in E$.
On a : $O(q) = \underbrace{\{u \in O(q) \mid \det u = 1\}}_{O^+(q) = SO(q)} \sqcup \underbrace{\{u \in O(q) \mid \det u = -1\}}_{O^-(q)}$

<u>Prop</u> : Dans le cas de $E = \mathbb{R}^2$ les éléments de $SO(\|.\|^2)$ sont les rotations d'angle $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:
$$SO_{\mathbb{R}^2}(\|.\|^2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

<u>Prop</u> : Dans le cas de $E = \mathbb{R}^n$ tout élément de $O_{\mathbb{R}^n}(\|.\|) = O(n)$ est, dans une certaine base, de la forme :
$$\begin{pmatrix} \boxed{I} & & & & \\ & \boxed{-I_q} & & & \\ & & \boxed{R_{\theta_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \boxed{R_{\theta_r}} \end{pmatrix}$$
avec $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

4

III Etude topologique de $GL_n(\mathbb{K})$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de sa structure d'espace vectoriel normé (toutes les normes sont équivalentes)

1/ Densité

Prop: $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

App°: * Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
* Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de matrices inversibles.

2/ Compacité

Prop: $O(n)$ est compact

App°1 [décomposition polaire]:

$$\begin{array}{ccc} O(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$ est un homéomorphisme !

Cor: Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme un produit $A = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
(⚠ S n'est pas unique si A non inversible)

DEV1 [App°2: Dans $E = \mathbb{R}^n$, soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à la norme euclidienne. Soit $\mathcal{B} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\| \leq 1\}$
Alors $O(n)$ est l'ensemble des points extremaux de $\mathcal{B}$.

DEV2 [App°3: Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$.
Alors G est contenu dans un conjugué de $O(n)$.

3/ Connexité

Prop: * $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs
* $SL_n(\mathbb{C})$ —————
* $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$
* $O(n)$ ————— $SO(n)$ et $O^-(n)$

Prop: $GL_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^* \times SL_n(\mathbb{R})$

Refs:
* Perrin : Cours d'Algèbre
* Mneimné-Testard : Intro à la théorie des groupes de Lie classique
* Francinou - ... : Oraux X-ENS - Algèbre 3 (décomposit° polaire + dev 1).