Leçon 106. Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie. Sous groupe de $GL(E)$. Applications.

Soit k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$

I Le groupe linéaire

1) Généralités [Per]

$Hom_k(E)$, ensemble des endomorphismes de E est naturellement muni d'une structure d'algèbre.

Def 1 : $GL(E)$ est le groupe des automorphismes de E i.e. l'ensemble des inversible de $Hom_k(E)$

Si on prend une base B de E, on a un isomorphisme entre $GL(E)$ et $Gl_n(k)$, l'ensemble des matrices inversibles $n \times n$.

⚠ Cet isomorphisme n'est pas canonique.

Rmq : permet l'utilisation du calcul matriciel pour étudier $GL(E)$

Prop 2 : $f \in GL(E) \Leftrightarrow f$ envoie une base sur une base

Rmq : cette action est transitive mais pas libre

Def 3 : le déterminant est une n-forme linéaire alternée

$\forall M \in \mathcal{M}_n(k)$ $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\quad \det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

[Gou]

Prop 4 : • le déterminant est l'unique forme n linéaire alternée de $\mathcal{M}_n(k)$ dans k telle que $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(\alpha I_n) = \alpha^n \det I_n$

• L'application $\det \mathcal{M}_n(k) \to k$ induit un homomorphisme multiplicatif de $GL(E)$ dans k^*

Prop 5 : $\operatorname{Ker} \det := SL(E)$, le groupe spécial linéaire

Rmq : $1 \to SL(E) \to GL(E) \to k^* \to 1$ est une suite exacte et $GL(E) = SL \rtimes k^*$

Prop 6 : $f \in Hom_k(E)$:

f bijective $\Leftrightarrow f$ injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow rg f = n$.

Prop 7 : $\mathfrak{S}_n$ s'injecte dans $Gl_n(k)$ par l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\to Gl_n(k) \\ \sigma &\mapsto M_\sigma = (a_{ij})_{ij} \end{aligned} \quad \text{avec } a_{ij} = \delta_{\sigma(i)j}$$

Thm 8 : Brauer $car(k) = 0$ (admis) [Obj]

Avec les notations précédentes, deux permutations σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ ssi M_σ et M_τ le sont dans $Gl_n(k)$

Thm 9 : Cayley [Per]

Tout groupe fini de cardinal n est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Cor 10 : tout groupe fini de cardinal n s'injecte dans $Gl_n(k)$

Thm 11 : Burnside [Fr Al1]

Un sous groupe G de $Gl_n(\mathbb{C})$ est fini ssi il est d'exposant fini.

2) Générateurs [Per]

Soit H un hyperplan de E d'équation $f \in E^*$ et $u \in GL(E)$ tq $u_{|H} = Id_H$. $u \neq id$.

Prop 12 : Sont équivalentes :

1) $\det u = \alpha \neq 1$ $(u \notin SL(E))$

2) u admet une valeur propre $\alpha \neq 1$ et u est diagonalisable.

3) $D = Im(u - id) \not\subset H$.

4) $\exists$ une base B de E telle que $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \alpha \end{pmatrix}$

Dvp 1

Def 13 Une telle application est appelée dilatation d'hyperplan H, de droite D et de rapport α.

Cor 14 : Deux dilatations sont conjuguées dans $Gl_n(\mathbb{K})$ ssi elles ont même rapport.

Prop 15 : sont équivalentes [Ulm]

1) $\det u = 1$ $(u \in SL(E))$

2) u n'est pas diagonalisable

3) $D = \mathrm{Im}(u - id) \subset H$

4) $\exists a \in H$ $a \neq 0$ tq $\forall x \in E$ $u(x) = x + f(x)a$

5) $\exists B$ base de E tq $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Def 16 : une telle application est appelée un transvection d'hyperplan H et de droite D.

Thm 17 : Les transvections engendrent $SL(E)$

Cor 18 : Les transvections et dilatations engendrent $GL(E)$

Prop 19 : les transvections sont conjuguées dans $GL(E)$ et, pour $n \geq 3$, dans $SL(E)$

II Exemples de sous groupes

1) Centre et groupe dérivé [Per]

Prop 20 : Le centre $Z(GL(E)) = \{\lambda Id \,/\, \lambda \in \mathbb{K}^*\}$

$Z(SL(E)) = \{\lambda Id \,/\, \lambda^n = 1\}$

Def 21 : 1) Le quotient $\dfrac{GL(E)}{Z(GL(E))}$ est appelé le groupe projectif linéaire, noté $PGL(E)$

2) $\dfrac{SL(E)}{Z(SL(E))}$ est appelé groupe projectif spécial linéaire noté $PSL(E)$

Thm 22 : $PSL_n(\mathbb{K})$ est simple sauf pour $(n=2, \mathbb{K} = \mathbb{F}_2)$ et $(n=3, \mathbb{K} = \mathbb{F}_2)$

Prop 23 : Si $n \geq 3$: $D(Gl_n(\mathbb{K})) = D(Sl_n(\mathbb{K})) = Sl_n(\mathbb{K})$.

2) Sous groupe défini par un invariant [Per]

Def 24 : Soit $u \in GL(E)$ et $f : E^2 \to \mathbb{K}$ un forme sesqui-linéaire non dégénérée.

Si $\forall x, y \in E$ $f(u(x), u(y)) = f(x,y)$, on dit que u est une isométrie de E.

Thm 25 : L'ensemble G des isométries est un sous groupe de $GL(E)$

Def 26 : 1) si f est symétrique sur E : $G = \mathcal{O}(f)$, groupe orthogonal

2) si f est hermitienne sur E : $G = \mathcal{U}(f)$, groupe unitaire

3) si f est alternée sur E : $G = Sp(f)$, groupe simplectique.

Rmq : Comme intersection de sous groupe, on obtient $SO(n)$ et $SU(n)$ des sous groupe de $GL(E)$

III Eléments de topologie pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

1) Densité [Mnei]

Thm 27 : $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Appli 28 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Appli 29 : Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices inversibles

2) Connexité [Mnei]

Prop 30 : $Gl_n(\mathbb{C})$ et $Sl_n(\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

Prop 31 : $Gl_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes homéomorphes : $Gl_n^+(\mathbb{R})$ et $Gl_n^-(\mathbb{R})$

Prop 32 : on a deux homéomorphismes :
$Gl_n^+(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}_+^* \times Sl_n(\mathbb{R})$; $Gl_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^* \times Sl_n(\mathbb{C})$

3) Compacité [Mnei]

Thm 33 : $O(n)$ et $SO(n)$ sont compacts dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Appli 34 : Décomposition Polaire
$M \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\exists ! (O,S) \in O(n) \times Sym^{++}(\mathbb{R})$ tq $M = OS$
et $\left| \begin{array}{l} O(n) \times Sym^{++}(\mathbb{R}) \longrightarrow Gl_n(\mathbb{R}) \\ \quad O \quad S \longmapsto OS \end{array} \right.$ est un homéomorphisme

Rmq décomposition vraie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais on perd l'unicité

Thm 35 : tout sous groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à un sous groupe d'isométries euclidiennes de $\mathbb{R}^n$

IV Action du groupe $Gl_n(E)$ et de ses sous groupes

[Per] 1) Action de $GL(E)$

Prop 36 $GL(E)$ agit transitivement par translation à gauche sur E
$\forall g \in GL(E)$ $\forall x \in E$ $g \cdot x = g(x)$

Prop 37 $GL(E)$ agit sur $\mathbb{P}(E)$ par translation à gauche

Rmq : Cette action induit une action fidèle de $PGL(E)$ sur $\mathbb{P}(E)$

Prop 38 : $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-1})$

[Per] $|Sl_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-2}) q^{n-1} = |PGl_n(\mathbb{F}_q)|$

$|PSl_n(\mathbb{F}_q)| = \dfrac{|Sl_n(\mathbb{F}_q)|}{d}$ où $d = pgcd(n, q-1)$

prop 39 : on a les isomorphismes exceptionnels suivants

1) $Gl_2(\mathbb{F}_2) = Sl_2(\mathbb{F}_2) = PGl_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
2) $PGl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$ et $PSl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$ [Per]
3) $PGl_2(\mathbb{F}_4) = PSl_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$
4) $PGl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et $PSl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$

[Co] 2) Action de $Gl_n(K) \times Gl_p(K)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$

prop 40 : $Gl_n(K) \times Gl_p(K)$ agit par équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(K)$ par : $(P,Q) \cdot M = PMQ^{-1}$. Le nombre de classe d'équivalence est $1 + \inf(n,p)$ et les $J_R = \left(\begin{array}{c|c} I_R & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ forment un système de représentants.

Appli 41 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ $\mathcal{A}_R$ est une partie connexe de $\mathcal{M}_n(K)$

[Fa] 3) Action de $SO(n)$ sur $S^{n-1}(\mathbb{R})$

Prop 42 : $SO(n)$ agit transitivement sur $S^{n-1}(\mathbb{R})$ pour $n \geq 2$ et $\dfrac{SO(n)}{SO(n-1)}$ est homéomorphe à S^{n-1}

Appli 43 : $SO(n)$ est connexe.

DEV 2

Bibli

[Mnei] Mneimné Testard

[Per] Perrin

[Goo] Gourdon algèbre

[Co] Cognet : Algèbre linéaire

[Ulm] Ulmer : théorie des groupes

[obj] Objectif agrégation

[Fa] Faraut : Analyse sur les groupes de Lie

[FaHe1] Oraux X-ENS, Algèbre 1 Francinou

Autres développements possibles :

- Thm de Burnside
- Thm de Brauer
- Sous groupe compact de $Gl_n(\mathbb{R})$
- $PSl_n(k)$ simple
- Décomposition polaire et l'homéomorphisme.