Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Cadre : soit k un corps et E un k-ev de dimension finie n.

I] Généralités sur le groupe linéaire [Per]

1) Groupes $GL(E)$ et $SL(E)$

Def 1 : Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des applications k-linéaires bijectives de E dans E.

Rq 2 : On a un isomorphisme $GL(E) \simeq GL(n,k)$ non canonique (il dépend du choix d'une base de E). Cela permet d'utiliser l'outil matriciel pour étudier $GL(E)$.

Prop-def 3 : L'application déterminant est un homéomorphisme de $GL(E)$ dans k^*. Son noyau est appelé groupe spécial linéaire, et est noté $SL(E)$. Il est isomorphe au groupe $SL(n,k)$ des matrices de déterminant 1.

Rq 4 : On a $SL(E) \triangleleft GL(E)$.

2) Transvections et dilatations

Prop-def 5 : Soit H un hyperplan de E et $u \in GL(E)$, tel que $u_{|H} = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\det u = \lambda \neq 1$ (i.e. $u \notin SL(E)$) ;

ii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ (donc une droite propre D pour λ) et u est diagonalisable ;

iii) $Im(u - Id) \not\subset H$;

iv) Dans une base convenable, u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ (0) & & & \lambda \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda \in k^*, \lambda \neq 1.$$

On dit que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite D et de rapport λ.

Rq 6 : Lorsque $\lambda = -1$ et $car(k) \neq 2$, u est appelée une réflexion.

Prop-def 7 : Soit H un hyperplan de E, d'équation $f \in E^*$ (i.e. on a $H = \ker f$, avec $f \neq 0$). Soit $u \in GL(E)$, $u \neq Id$, tel que $u_{|H} = Id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $\det u = 1$ (i.e. $u \in SL(E)$).

ii) u n'est pas diagonalisable.

iii) On a $D = Im(u - Id) \subset H$.

iv) Il existe $a \in H, a \neq 0$ tel que : $\forall x \in E, u(x) = x + f(x)a$.

v) Dans une base convenable, u a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ & & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On dit que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D.

Exc 8 : $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$, est une transvection.

Prop 9 : Soit τ une transvection de droite D et d'hyperplan H, et soit $u \in GL(E)$. Alors $u \tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan $u(H)$.

Prop 10 : a) Pour $n \geq 3$, les transvections sont conjuguées dans $SL(n,k)$.

b) Pour $n = 2$, la matrice d'une transvection de $SL(2,k)$ est conjuguée dans $SL(2,k)$ à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in k$.

Th 11 : a) Les transvections engendrent $SL(E)$.

b) Les transvections et les dilatations engendrent $GL(E)$.

II] Sous-groupes de $GL(E)$.

1) Centre et groupe dérivé [Per]

Th 12 : Le centre Z de $GL(E)$ est formé des homothéties $x \mapsto \lambda x$ avec $\lambda \in k^*$. Il est isomorphe à k^*.
Le centre de $SL(E)$ est $Z \cap SL(E)$, il est isomorphe à $\mu_n(k) = \{\lambda \in k, \lambda^n = 1\}$.

Rq 13 : En particulier, les groupes $GL(E)$ et $SL(E)$ ne sont pas simples.

Def 14 : Le quotient de $GL(E)$ par son centre est appelé le groupe projectif linéaire et est noté $PGL(E)$. De même, le quotient de $SL(E)$ par son centre est appelé le groupe spécial linéaire et est noté $PSL(E)$. On note $PSL(n,k)$ et $PGL(n,k)$ les quotients des groupes matriciels correspondant.

Th 15 : a) On a $D(GL(n,k)) = SL(n,k)$ sauf si $(n=2, k=\mathbb{F}_2)$
b) On a $D(SL(n,k)) = SL(n,k)$ sauf si $(n=2, k=\mathbb{F}_2)$ ou $(n=2, k=\mathbb{F}_3)$.

Th 16 : Le groupe $PSL(n,k)$ est simple sauf dans les deux cas suivants :
- $n=2$ et $k=\mathbb{F}_2$
- $n=2$ et $k=\mathbb{F}_3$

2) Sous-groupes finis

sans référence

Def 17 : Soit $\sigma \in S_n$, on associe à σ sa matrice de permutation $P_\sigma = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$.

Rq 18 : On a $\varepsilon(\sigma) = \det(P_\sigma)$.

Th 19 : (Cayley) Tout groupe fini G d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de S_n. En particulier $G \hookrightarrow S_n$.

Cor 20 : Soit G un groupe fini d'ordre n, alors $G \hookrightarrow GL(n,k)$.

[X-ENS 2]

Th 21 : (Burnside) Tout sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini. DEV 1

3) Groupe orthogonal

Def 22 : On appelle groupe orthogonal l'ensemble $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ {}^tA\,A = I_n\}$.

Def 23 : On appelle groupe spécial orthogonal l'ensemble $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}), \det A = 1\}$.

Ex 24 : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in O(3,\mathbb{R})$

Ex 25 : La matrice de rotation d'angle θ, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in O(2,\mathbb{R})$.

Th 26 : Pour toute matrice $M \in GL(n,\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(O,S) \in O(n,\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$ (décomposition polaire).

III | Quelques actions du groupe $GL(E)$

1) Actions naturelles de $GL(E)$ [H2G2]

Prop 27 : $GL(E)$ agit transitivement par translation à gauche sur E : $\forall g \in GL(E), \forall x \in E, g \cdot x = g(x)$.

Rq 28 : Il s'agit du changement de base pour un vecteur de E.

Prop 29 : Le groupe $GL(n,k)$ agit par conjugaison sur $M(n,\mathbb{R})$: $\forall P \in GL(n,k), \forall A \in M(n,\mathbb{R}), P.A = PAP^{-1}$.

Rq 30 : Il s'agit du changement de base pour une matrice.

2) Action par congruence [H2G2]

Def 32 : L'action par congruence est l'action de $GL(n,k)$ sur $S_n(k)$ définie par : $\forall P \in GL(n,k), \forall A \in S_n(k), P.A = {}^tPAP$.
Deux matrices symétriques A et A' de $S_n(k)$ sont congruentes si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de congruence.

[H2G2] p150 Rq 33 : deux matrices sont congruentes si et seulement si elles sont les matrices de la même forme quadratique dans des bases différentes.

[H2G2] p155 Rq 34 : dans le cas $k = \mathbb{R}$, $O(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Stab}(I_n)$

[H2G2] p181-182 Th 35 : (Théorème d'inertie de Sylvester). Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe deux entiers p et r, $0 \leq p \leq r$ et une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que : pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{r} x_j$.
De plus, les entiers p et r ne dépendent que de q :
$r = \mathrm{rg}\, q$ et $p = \max\{\dim F,\ F \text{ sev tq } q_{|F} \text{ est définie positive}\}$.

Th 36 : (reformulation du théorème d'inertie de Sylvester).
Les orbites de l'action de $GL(n,\mathbb{R})$ par congruence sur $S_n(\mathbb{R})$ sont les $\mathcal{O}_{p,r-p}$, $0 \leq p \leq r \leq n$, où $\mathcal{O}_{p,r-p}$ est l'ensemble des matrices dont la forme quadratique associé possède p carrés positifs et $r-p$ carrés négatifs.

3) Action sur les drapeaux

[X-ENS1] Def 37 : Un drapeau de E est un suite croissante pour l'inclusion de $n+1$ sev $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n$ avec $\dim E_k = k$.

[X-ENS1] Prop 38 : $GL(n,k)$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de k^n. On a $G/T_s \simeq \mathcal{D}$, où T_s est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles.

Th 39 : (décomposition de Bruhat)
Toute matrice $A \in GL(n,k)$ s'écrit sous la forme $T_1 P_\sigma T_2$ où $T_1, T_2 \in T_s$ et P_σ est une matrice de permutation. De plus, la permutation σ est unique. DEV2

Appli 40 : $GL(n,k)$ agit sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et il y a $n!$ orbites

IV] Topologie de $GL(E)$ ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Densité

Prop 41 : $GL(n,k)$ est dense dans $M(n,k)$.

Appli 42 : Soient $A, B \in M(n,k)$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

Appli 43 : La différentielle du déterminant.

2) Connexité

Prop ~~44~~ : $GL(n,\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Rq 45 : $GL(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Appli 46 : L'ensemble des projecteurs de rang p de $M(n,\mathbb{C})$ est connexe.

Prop 47 : $SL(n,\mathbb{R})$ et $SL(n,\mathbb{C})$ sont connexes par arcs.

3) Compacité

Prop 48 : $O(n,\mathbb{R})$ et $SO(n,\mathbb{R})$ sont compacts dans $M(n,\mathbb{R})$

Appli 49 : La décomposition polaire*

$$\begin{array}{ccc} O(n,\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme.

Prop 50 : Tout sous-groupe compact de $GL(n,\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $O(n,\mathbb{R})$ est le groupe $O(n,\mathbb{R})$.

Prop 51 : Tout sous-groupe compact de $GL(n,\mathbb{R})$ est conjugué d'un sous-groupe de $O(n,\mathbb{R})$.

Ref :
- [Per] Cours d'algèbre, Perrin
- [Gri] Algèbre linéaire, Grifone
- [Mne] Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Mneimné-Testard
- [H2G2] Histoires hédonistes de groupes et de géométries, Caldero-Germoni
- [X-ENS 1] Oraux X-ENS. Algèbre 1, Francinou, Gianella, Nicolas.
- [X-ENS 2] " , Algèbre 2, " " "
- [ROU] Petit guide du calcul différentiel, Rouvière