106

Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

Dans toute la leçon, on considère k un corps commutatif et E un k-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ $(n < +\infty)$.

I) Perspectives algébriques du groupe linéaire

1) Définitions

Def 1: Le groupe linéaire $GL(E)$ est le groupe des k-automorphismes de E, i.e. des applications k-linéaires bijectives de E dans E.

Def 2: Le groupe linéaire matriciel $Gl_n(k)$ est l'ensemble des matrices inversibles de taille n.

Prop 3: La donnée d'une base ~~de~~ E définit un isomorphisme de $GL(E)$ sur $Gl_n(k)$ (utile en pratique)

Thm 4: Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, sont équivalentes les assertions suivantes:
(i) $u \in GL(E)$
(ii) $\ker(u) = \{0\}$ (u injectif)
(iii) $\mathrm{Im}(u) = E$ (u surjectif)
(iv) $rg(u) = n$
(v) $\det(u) \neq 0$
(vi) u transforme toute base de E en une base de E.
(vii) il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ v = I_n$ (u admet inverse à droite)
(vii) il existe $w \in \mathcal{L}(E)$ tel que $w \circ u = I_n$ (u admet un inverse à gauche)

2) Similitude et équivalence

Def 5: Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$. A et B sont dites équivalentes s'il existe P et Q dans $Gl_n(k)$ vérifiant $A = PBQ^{-1}$.

Prop 6: Deux matrices équivalentes ont le même rang.

Def 6: Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(k)$. A et B sont dites semblables s'il existe P dans $Gl_n(k)$ vérifiant $A = PBP^{-1}$.

rq 1: On dit que $Gl_n(k)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}_n(k)$

rq 2: Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

ex: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ sont semblables avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Prop 7: La relation de similitude est une relation d'équivalence laissant invariant la trace, le rang, le déterminant, le polynôme caractéristique et le polynôme minimal.

ex: Dans l'exemple précédent, on a bien les traces valant $1+1 = -3+5 = 2$ et les déterminants valant 1.

3) Générateurs de $GL(E)$ et $SL(E)$

Def 8: Le groupe spécial linéaire est l'ensemble: $\{u \in GL(E) \mid \det(u) = 1\}$ et on le note $SL(E)$. On note $Sl_n(k)$ son analogue matriciel.

Def 9: Soit $u \in GL(E)$. u est une dilatation s'il existe une base telle que sa matrice s'y écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in k^* \setminus \{1\}$.

Prop 10: Soit H un hyperplan de E, et $u \in GL(E)$ vérifiant $u_{|H} = Id_H$. Sont alors équivalentes les assertions:
(i) u est une dilatation
(ii) $\det u = \lambda \neq 1$ (i.e. $u \notin SL(E)$)
(iii) u admet une valeur propre $\lambda \neq 1$ et est diagonalisable
(iv) $\mathrm{Im}(u - Id) \not\subset H$.

Def 11 : Soit $u \in GL(E)$. u est une transvection s'il existe une base telle que sa matrice s'y écrit sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\end{pmatrix}$.

Prop 12 : Soit H un hyperplan d'équation $f \in E^*$, soit $u \in GL(E)$, $u \neq id$ telle que $u_{|H} = id_H$. Sont alors équivalentes :
(i) u est une transvection
(ii) $\det u = 1$ (i.e. $u \in SL(E)$)
(iii) u n'est pas diagonalisable
(iv) $D = \mathrm{Im}(u - I_d) \subset H$
(v) $\exists a \in H$, $a \neq 0$, tel que $\forall x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

rq : lien avec le pivot de Gauss.

Thm 13 : $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Thm 14 : $GL(E)$ est engendré par les transvections et les dilatations.

Application : Simplicité de $PSL_n(k)$ pour $n \neq 2$ ou $n = 2$ et $k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$.

II) ~~Sous-groupes remarquables~~

1) Sous-groupes normaux

Prop 15 : $Z(GL(E)) = k^* . Id$

Prop 16 : $Z(SL(E)) = \mu_n(k) . id$ avec $\mu_n(k)$ le groupe des racines n-èmes de l'unité

Def 17 : On définit le groupe linéaire projectif $PGL(E)$ et le groupe spécial linéaire projectif $PSL(E)$ par
$$PGL(E) := GL(E)/_{Z(GL(E))} \qquad PSL(E) := SL(E)/_{Z(SL(E))}$$

rq : On définit de façon analogue $PGL_n(k)$ et $PSL_n(k)$

thm 18 : Pour k algébriquement clos, $PGL(E)$ et $PSL(E)$ sont isomorphes

Prop 19 : Groupes dérivés. On a $D(SL(E)) \subset D(GL(E)) \subset SL(E)$ et :
- $n \geq 3$: $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$
- $n = 2$, $k \neq \mathbb{F}_2$: $D(GL(E)) = SL(E)$
- $n = 2$, $k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$: $D(SL(E)) = D(GL(E)) = SL(E)$
- $n = 2$, $k = 2$: $GL(E) = SL(E)$ et $D(SL(E)) \simeq A_3$
- $n = 2$, $k = \mathbb{F}_3$: $D(SL(E)) \simeq H_8$

Thm 20 : $PSL_n(k)$ est simple pour $n \geq 3$ ou $n = 2$ et $k \neq \mathbb{F}_2$

Application : Les sous-groupes normaux non-triviaux de $SL_n(k)$ sont les sous-groupes de son centre

Application : les sous-groupes normaux non-triviaux de $GL_n(k)$ sont les sous-groupes de son centre et les sur-groupes de son groupe dérivé.

2) Un exemple de stabilisateur : le groupe orthogonal

On peut créer des groupes comme stabilisateur d'une action

ex : - matrices diagonale par blocs pour un espace décomposé en somme directe
- matrices triangulaires par blocs pour un drapeau

Def 21 : Soit q une forme quadratique sur E. On appelle groupe orthogonal de q et on note $O(q)$ l'ensemble des automorphismes u vérifiant $q(u(x)) = q(x)$ pour tout vecteur x de E. C'est un sous-groupe de $GL_n(E)$.

Def 22 : On appelle groupe orthogonal standard de degré n sur k et on note $O_n(k)$ le groupe orthogonal associé à la forme $q(x_1 - x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$, pour $car(k) \neq 2$.

rq : $O_n(k)$ est l'ensemble des stabilisateurs de l'identité pour l'action de congruence i.e $O_n(k) = \{M \in GL_n(k) \mid {}^tMM = M\,{}^tM = I_n\}$

Def 23 : On définit les groupes spéciaux orthogonaux $SO(E)$ et $SO_n(k)$ par $SO(E) = \{u \in O(E), \det(u) = 1\}$
$SO_n(k) = \{M \in O_n(k), \det(M) = 1\}$

prop 24 : $SO_n(\mathbb{K})$ est compact et $O_n(\mathbb{K})$ est compact maximal pour la norme euclidienne.

thm 25 : Tout sous groupe compact maximal de $Gl_n(k)$ est un conjugué de $O_n(\mathbb{K})$.

Application : Decomposition polaire de matrices de $M_n(k)$ où $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, decomposition QR.

Def 26 : Une symétrie (involution) est une application u vérifiant $u^2 = id$. Sa matrice, dans une base convenable, peut s'écrire : $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$

Si $s = 1$ on dit que u est une réflexion
Si $s = 2$ u est un retournement

prop 27 : $O_n(k)$ est engendré par les réflexions

prop 28 : $SO_n(k)$ est engendré par les réflexions et les retournements.

3) Sous groupes finis

thm 29 : (Burnside). Un sous-groupe de $Gl_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini — DEV 1

prop 30. Il n'y a qu'un nombre fini de sous-groupes finis de $Gl_n(\mathbb{Z})$.

III) Influence du corps de base

1) Topologie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

prop 31 : $Gl_n(K)$ ouvert de $M_n(k)$

prop 32 : $Gl_n(K)$ dense dans $M_n(k)$

Application : AB et BA ont le même polynome caractéristique

Application : Existence d'une base de matrices inversibles de $M_n(k)$

prop 33 : $Gl_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs, pas $Gl_n(\mathbb{R})$

Application : l'ensemble des matrices de rang $p < n$ est une partie connexe de $M_n(\mathbb{K})$

2) Cas des corps finis

On se place désormais dans $\mathbb{F}_q$ le corps à q éléments

Prop 34 : On peut dénombrer les groupes suivants

- $|Gl(E)| = \prod_{k=1}^{n} (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1)$
- $|Sl(E)| = \frac{1}{q-1} |Gl(E)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=2}^{n} (q^k - 1)$
- $|PGl_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{1}{q-1} |Gl_n(\mathbb{F}_q)|$
- $|PSl_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|Sl_n(\mathbb{F}_q)|}{pgcd(q-1, n)}$

Application : Isomorphismes exceptionnels

- $Gl_2(\mathbb{F}_2) = Sl_2(\mathbb{F}_2) = PSl_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
- $PGl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$, $PSl_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$
- $PGl_2(\mathbb{F}_4) = PSl_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$
- $PGl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$, $PSl_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$

Application : Dénombrement des matrices diagonalisables de $\mathbb{F}_q$ — DEV 2