104 - Représentation et caractère d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

Références : SERRE Représentation linéaire des groupes finis.
RAUCH Les groupes finis et leurs représentations
PEYRE L'Algèbre discrète de la TF
DEMAZURE

On considère un groupe fini G et des $\mathbb{C}$-e.v. de dimensions finies

I Généralité sur les représentations linéaires

1) Premières définitions

Def : Une représentation de G dans le $\mathbb{C}$-e.v. V est un morphisme $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

cela revient à considérer une action linéaire de G sur V.

Def : on appelle degré de la représentation considérée la dimension de V

Def : on dit que deux représentations (ρ, V) et (ρ', V') de G sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\tau : V \to V'$ qui vérifie l'identité : $\forall s \in G,\ \tau \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ \tau$

- Deux représentations isomorphes on évidement même degré.
- La dernière identité vérifiée par τ s'appelle l'équivariance

2) Exemples

- La représentation triviale : $\rho : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ g \longmapsto 1 \end{array}$ est de degré 1

- La représentation régulière : on prend V un espace de dimension égale à $|G|$ et $(e_i)_{i \in G}$ une base de V indexée par G.

  $\forall s \in G$, on définit $\rho(s)$ comme l'isomorphisme qui pour tout $t \in G$ envoit e_t sur e_{st}

  cette représentation est de degré $|G|$

- Plus généralement si G agit sur X, on prend V de dimension $|X|$ et une base $(e_i)_{i \in X}$ de V indexée par X et on prend $\rho(s)$ l'isomorphisme qui envoit e_x sur $e_{s.x}$, $\forall x \in X$

- Si V est un $\mathbb{C}$-e.v. et $A \in Gl_n(V)$ alors

  $\rho : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \longrightarrow GL(V) \\ n \longmapsto A^n \end{array}$ est une représentation de $\mathbb{Z}$ dans V.

3) Sous-représentations

Prop/def : soit (ρ, V) une représentation de G et W un sev de V stable par l'action de G alors

$\rho^W : \begin{array}{l} G \longrightarrow GL(W) \\ s \longmapsto \rho(s)_{|W} \end{array}$ est une représentation de G

on l'appelle sous-représentation de (ρ, V)

ex : soit (ρ, V) la représentation régulière de G et $W = \mathrm{Vect}\langle x \rangle$ où $x = \sum_{t \in G} e_t$ alors (ρ^W, W) est une sous-représentation de (ρ, V) qui est isomorphe à la représentation triviale.

- Si $\tau : (V_1, \rho_1) \to (V_2, \rho_2)$ est une application linéaire équivariante alors $\mathrm{Ker}\,\tau$ est une sous-représentation de (ρ_1, V_1) et $\mathrm{Im}\,\tau$ est une sous-représentation de (ρ_2, V_2)

4) Opérations sur les représentations

- Si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont deux représentations de G alors on définit la représentation $(\rho, V_1 \oplus V_2)$ par

  $$\forall s \in G,\ \rho(s)(v_1, v_2) = (\rho_1(s)(v_1), \rho_2(s)(v_2))$$

  $(\rho, V_1 \oplus V_2)$ est appelée somme directe des représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2)

- Si (ρ, V) est une représentation de G alors on définit la représentation duale (ρ', V') par $\forall s \in G,\ \forall y \in V'$,

  $$\rho'(s)(y) = y \circ (\rho(s))^{-1}$$

- Si (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont des représentations de G, on définit la représentation $(\rho, \mathrm{Hom}(V_1, V_2))$ par

  $$\forall s \in G,\ \forall y \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2),\ \rho(s)(y) = \rho_2(s) \circ y \circ (\rho_1(s))^{-1}$$

5) Représentations irréductibles

Def: une représentation (ρ, V) est dite irréductible si $V \neq \{0\}$ et si ses seules représentations sont $\{0\}$ et V

Ex: La représentation triviale et plus généralement toute représentation de degré 1 est irréductible.

Th (Maschke)
soit (ρ, V) une représentation de G, alors tout sev invariant par G admet un supplémentaire invariant

corollaire: Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles

Rq si $Im(G)$ est un groupe d'homothéties et $\dim V > 1$ il n'y a pas unicité. Nous verrons cependant comment le lemme de schur garantie une certaine forme d'unicité.

II Théorie des Caractères

1) Définitions et premières propriétés

Def soit (ρ, V) une représentation de G, son caractère est la fonction $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall s \in G, \ \chi_\rho(s) = tr(\rho(s))$$

on dit que χ_ρ est irréductible si (ρ, V) l'est.

Prop: soit χ_ρ le caractère d'une représentation (ρ, V) alors:

- $\chi_\rho(1) = \dim V$
- $\forall s \in G, \ \chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$
- $\forall s, t \in G, \ \chi(t s t^{-1}) = \chi(s)$

On a aussi:

prop:
- Deux représentations isomorphes ont même caractère
- si $(\rho, V_1 \oplus V_2)$ est la somme directe des représentations (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) alors $\chi_\rho = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$

2) Lemme de schur et orthogonalité des caractères

on définit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{C}^G$ (fonctions de G dans $\mathbb{C}$) par : $\forall f, g \in \mathbb{C}^G, \ \langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} f(s) \overline{g(s)}$

Lemme de schur: Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations irréductibles de G et $f : V_1 \to V_2$ équivariante, alors

- si V_1 et V_2 ne sont pas isomorphes alors $f = 0$
- si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$ alors f est une homothétie

Th (orthogonalité des caractères)
Soient (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux représentations irréductibles alors $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ sont isomorphes} \\ 0 \text{ si } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ ne sont pas isomorphes} \end{cases}$

En conséquence:

Th: Soit (ρ, V) une représentation qui se décompose en $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$ où les V_i sont irréductibles. Soit (ρ', W) une représentation irréductible, alors le nombre de V_i isomorphe à (ρ', W) est $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle$

une conséquence immédiate est "l'unicité" dans la décomposition en somme directe de représentations irréductibles:

coro: Soit (ρ, V) une représentation et (ρ', W) une représentation irréductible, alors toute décomposition de (ρ, V) en somme de décomposition irréductible a même nombre de termes isomorphes à (ρ', W)

Enfin la conséquence suivante justifie l'étude des caractères:

coro: Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère.

Une conséquence de l'orthogonalité des caractères est enfin le critère d'irréductibilité:

prop: une représentation de caractère χ est irréductible ssi $\langle \chi, \chi \rangle = 1$

3) Décomposition de la représentation régulière

prop: Le caractère de la représentation régulière vaut 1 sur l'élément neutre de G et 0 sinon.

coro: Chaque représentation irréductible est contenue dans la représentation régulière un nombre de fois égal à son degré.

coro: Soient $(V_1, \rho_1), \dots, (V_h, \rho_h)$ les représentations irréductibles de G alors • $|G| = \sum_{i=1}^{h} (\dim V_i)^2$

• si $s \in G \setminus \{1\}$, $\sum_{i=1}^{h} (\dim V_i) \chi_{\rho_i}(s) = 0$

Rq cela permet de voir si une liste de représentation irréductible est exhaustive.

4) Nombre de représentations irréductibles

Def: On note $F(G)$ le sev de $\mathbb{C}^G$ contenant les fonctions "centrale" (constantes sur les classes de conjugaison de G).

Rq Les caractères sont des fonctions centrales et sont orthonormés.

prop: L'ensemble des caractères irréductibles forment une base orthonormée de $F(G)$

coro: G a autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison.

on définit alors la table des caractères de G comme une matrice $h \times h$ (où h est le nombre de classes de conjugaison de G) dont chaque ligne contient les valeurs d'un caractère sur les classes de conjugaisons de G :

	K_1	$\dots$	K_h	← classes de conjugaison
χ_1				← valeurs du caractère
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

on sait déjà que les lignes d'une table de caractère sont orthonormées (pour le bon produit scalaire !), on a aussi :

prop: Les colonnes de la table des caractères sont orthogonales pour le produit scalaire canonique et la norme de la colonne associée à la classe K_i est $\frac{|G|}{|K_i|}$

III Cas d'un groupe abélien

1) Dual de G

prop: G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

On suppose dorénavant que G est abélien.

Def: on définit $\hat{G}$ le dual de G par $\hat{G} = \{f : G \to \mathbb{C}^*, \text{morphismes}\}$

Rq $\hat{G}$ est un groupe et il s'agit de l'ensemble des caractères irréductibles de G.

Th: G est isomorphe à $\hat{G}$, en particulier $|G| = |\hat{G}|$

on a aussi un isomorphisme canonique entre G et $\hat{\hat{G}}$ donné par $s \mapsto (\chi \mapsto \chi(s))$

application : Théorème de structure des groupes abéliens finis.

2) Transformée de Fourier discrète

$f \in \mathbb{C}^G$ s'écrit $f = \sum_{\chi \in \hat{G}} \underbrace{\langle f, \chi \rangle}_{\text{coefficient de Fourier de } f \text{ en } \chi} \chi$

Def: soit $f \in \mathbb{C}^G$, on définit $\mathcal{F}(f)$ sa transformée de Fourier par : $\mathcal{F}(f) : \mathbb{C}^{\hat{G}} \to \mathbb{C}$, $\chi \mapsto \langle f, \chi \rangle$

Th (inversion de Fourier)
$\mathcal{F}$ est un isomorphisme d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$ défini par :
$$\forall g \in \mathbb{C}^{\hat{G}}, \forall s \in G, \mathcal{F}^{-1}(g)(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(s^{-1}) g(\chi)$$

Def (convolution) : $\forall f, g \in \mathbb{C}^G$, $\forall s \in G$ on pose $f * g(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} f(t) g(t^{-1}s)$

prop: $\forall f, g \in \mathbb{C}^G$, $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \times \mathcal{F}(g)$