NOM : Piépa Pegug Prénom : Rennes1 Jury 2013/2014

Algèbre ← Entourez l'épreuve → **Analyse**

Sujet choisi : 107, Représentation et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$

Autre sujet :

Cadre : G un groupe fini, les espaces vectoriels seront sur $\mathbb{C}$.

I Représentation d'un groupe fini

1) Définitions et premiers exemples.

Définition 1 : Si V est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, une représentation linéaire de G sur V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \longrightarrow GL(V)$, $g \longmapsto \rho(g) = \rho_g$ appelé morphisme de représentation.

Remarque 2 $*$ Il s'agit d'une action $G \curvearrowright V$ compatible avec la structure d'ev sur V.

$*$ ρ permet de représenter les $g \in G$ comme des endomorphismes linéaires.

$*$ V est appelé espace de représentation, ou représentation, de G.

Exemple 3 : Si $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow V$, $\bar{k} \longmapsto \omega^k id_V$ est un morphisme de représentation.

Définition 4 Lorsque V est un ev de dimension finie, on appelle degré de la représentation la dimension de V.

Dans la suite on ne s'intéressera qu'aux représentations de dimension finie.

Proposition 5 Se donner une représentation de dimension finie est équivalent à se donner une famille $(R_g)_{g \in G}$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec n = degré de V, vérifiant $\forall g \in G$, $\det(R_g) \neq 0$ et $\forall g, h \in G$, $R_{gh} = R_g R_h$.

Définition 6 Une telle famille est une représentation sous forme matricielle.

Exemples 7 : $*$ Représentations de degré 1 : $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}$. On a $\forall g \in G$, $(\rho(g))^{|G|} = 1$, ie $\rho(g) \in \mathbb{U}$. Si $\forall g \in G$, $\rho(g) = 1$, alors ρ est la représentation unité.

$*$ Soit $F = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$: $(F^j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une représentation sous forme matricielle de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$*$ Si $G \curvearrowright X$, avec X fini, si $V = \mathbb{C}^{|X|}$, on en munissant V d'une base $(e_1, \dots, e_{|X|})$, si $\rho : G \longrightarrow$, $g \longmapsto e_g$, V est la représentation de permutation. En particulier, $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$, ie $\mathbb{C}^n$ est une représentation de permutation de $\mathfrak{S}_n$.

$*$ En particulier $G \curvearrowright G$ par translation à gauche : la représentation de permutation est appelée représentation régulière de G.

Remarque 8 Les éléments $\rho(g)$, $g \in G$, sont d'ordres finis ie. diagonalisables.

Définition 9 Si V et W deux représentations, Hom(V, W) est une représentation munie de $\rho : u \longmapsto (g \cdot u : v \mapsto g \cdot u(g^{-1} \cdot v))$. On a $\rho_{Hom(V,W)} = \rho_W \circ u \circ \rho_V^{-1}$

Définition 10 Si V et V' deux représentations de morphismes ρ et ρ' sont isomorphes ssi il existe un isomorphisme linéaire φ de V dans V' tel que $\varphi \circ \rho = \rho' \circ \varphi$: φ est un isomorphisme de représentation.

Proposition 11 Si on considère des représentations sous forme matricielle, un tel isomorphisme se traduit par une matrice Φ inversible telle que $\forall g \in G$, $\Phi R_g = R'_g \Phi$.

Remarque 12 Un tel isomorphisme permet de comparer des représentations d'un groupe.

Exemples 13 $*$ Si W une représentation avec $w \in W$ tel que $(\rho_g(w))_{g \in G}$ soit une base de W, alors W est isomorphe à la représentation régulière.

$*$ Si G est commutatif, si $(R_g)_{g \in G}$ une représentation matricielle, les R_g commutent, i.e il existe Φ inversible $(D_g)_{g \in G}$ une représentation avec des matrices diagonales telle que $D_g = \Phi^{-1} R_g \Phi$.

Exemple 14 : $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\rho = id_{\mathbb{C}}$ et $\rho' : 1 \longrightarrow id$, $-1 \longrightarrow -id$ sont non isomorphes.

2) Sous représentations.

Définition 15 Si V une représentation, W un sev de V tel que $\forall g \in G$, $\rho_g(W) \subset W$, alors W est une sous représentation.

Chap 2 Serre

Exemples 16 * Si G est commutatif, les sev propres communs aux $\rho(g)$ sont des sous représentations.
* Si V est la représentation de permutation de $G \curvearrowright X$, si $e = \sum_{x\in X} e_x$, $D = \mathrm{Vect}(e)$ est une sous-représentation.
* $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{u \in \mathrm{Hom}(V_1,V_2) \mid \rho_2 \circ u = u \circ \rho_1\}$ est une sous représentation de $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$.
* Si $u \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$, $\ker u$ et $\mathrm{im}\, u$ sont des sous représentations.

Proposition 17 Si V est une représentation, si W est une sous représentation, alors W admet un supplémentaire W' dans V qui soit une sous représentation. On écrit alors $V = W \oplus W'$.

Remarque 18 Si V est muni d'un produit scalaire $\langle,\rangle$, en considérant $\langle \cdot,\cdot\rangle_G = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \langle \rho_g \cdot, \rho_g \cdot\rangle$, W' est l'orthogonal de W pour $\langle,\rangle_G$.

Remarque 19 Si V_1, V_2 deux représentations de degré n_1, n_2, on peut définir $V_1 \oplus V_2$ en les plongeant dans un ev V de dimension n_1+n_2.

Exemples 20 * Si G commutatif, $V = \bigoplus E_\lambda$, où E_λ sont les sev propres.
* Si V est la représentation de permutation, $H = \{\sum_{x\in X} \lambda_x e_x \mid \sum_{x\in X} \lambda_x = 0\}$, alors $D^\perp =$ et $V = D \oplus H$

3) Représentation irréductible:

Définition 21 Une représentation V est irréductible si ses seules sous représentations sont $\{0\}$ et V.

Exemples 22: * les représentations de degré 1 sont irréductibles.
* Si G est commutatif, V irréductible $\Leftrightarrow$ V de degré 1
* la représentation de permutation $G \curvearrowright X$ n'est pas irréductible.

Théorème 23: (Maschke) Toute représentation se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Remarque 24: si $G = \mathfrak{S}_n \curvearrowright \{1, \dots, n\}$, alors $V = D \oplus H$ est une décomposition en représentation irréductible (cf plus loin).

Théorème 25 (Schur) Soient V_1, V_2 deux représentations irréductibles. alors: $\to$ Si V_1 et V_2 non isomorphes, $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{0\}$.
$\to$ Si $V_1 \simeq V_2$, alors $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_{V_1})$.

II) Caractères et représentation.

1) Caractère d'une représentation

Définition 26 Soit V une représentation de morphisme ρ. Le caractère de V est la fonction $\chi_V : g \in G \longmapsto \mathrm{tr}(\rho_g) \in \mathbb{C}$

Exemples 27 * Si V de degré 1, $\chi_V = \rho$. En fait, χ_V morphisme $\Leftrightarrow$ V de degré 1
* Si $G \curvearrowright X$, V la représentation de permutation. Alors, $\chi(g) = |\{x \in X \mid g \cdot x = x\}|$.

Propriétés 28: Si χ est le caractère de V de morphisme ρ, alors
(i) $\chi(1) = \dim V$ (ii) $\forall g \in G$, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (iii) $\forall g,h \in G$ $\chi(h^{-1}gh) = \chi(g)$

Définition 29 Les fonctions $G \to \mathbb{C}$ vérifiant (iii) sont appelées les fonctions centrales. Elles forment un $\mathbb{C}$ ev, noté $\mathcal{C}(G)$.

Proposition 30 Si V_1, V_2 deux représentations de caractères χ_1 et χ_2,
(i) $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_1 + \chi_2$ et (ii) $\chi_{\mathrm{Hom}(V_1,V_2)} = \overline{\chi_1}\chi_2$.

Exemple 31 Si $G \curvearrowright X$, V la représentation de permutation, on a $V = D \oplus H$, ie $\chi_H = \chi_V - \chi_D$: $\forall g \in G$, $\chi_H(g) = |\mathrm{fix}(g)| - 1$.

2) Caractères irréductibles et orthogonalité.

Définition 32: Le caractère d'une représentation irréductible est dit irréductible

Exemple 33 (cf Exemple 31) χ_D et χ_H sont irréductibles.

Définition 34 On peut définir un produit scalaire sur les caractères:
$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}$.

Remarque 35 Ce produit scalaire est en fait défini sur $\mathcal{C}(G)$.

Théorème 36 (Frobenius) Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de $\mathcal{C}(G)$. DVP1

Remarque 37 Ce théorème est une conséquence du théorème de Schur.

Corollaire 38 On a un nombre fini de caractères irréductibles, égal au nombre de classes de conjugaisons dans G.

Application 39 Soit V une représentation qui se décompose en représentations irréductibles $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. Si φ est le caractère de V, χ celui d'une représentation irréductible W, $\langle \varphi, \chi\rangle$ est alors

4

égal au nombre de W_i isomorphe à W.

<u>Conséquence 41</u> : le nombre de W_i isomorphe à W ne dépend pas de la représentation choisie.

<u>Proposition 42</u> Deux représentations de même caractère sont isomorphes.

<u>Proposition 43</u> : Soit φ le caractère d'une représentation V, alors $\langle \varphi, \varphi \rangle$ est un entier positif et $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1 \Leftrightarrow V$ est irréductible.

<u>Remarque 44</u> : Le théorème de Frobenius conduit donc à un critère pratique d'irréductibilité.

<u>Exemple 45</u> Ceci sert à prouver que, si $G = \mathfrak{S}_n \curvearrowright \{1,..,n\}$, si $V = \mathbb{1} \oplus H$, χ_H est irréductible.

<u>3) Application à la représentation régulière de G</u>

On considère V_{reg} la représentation régulière et χ_{reg} son caractère.

<u>Proposition 46.</u> On a $\chi_{reg}(g) = 0$ si $g \neq 1$, $\chi_{reg}(1) = |G|$.

<u>Conséquence 47</u> Si $V_{reg} = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$ avec W_i des représentations irréductibles, si W est une représentation irréductible, à isomorphisme près, si k = degré de W, W apparaît k fois dans cette décomposition.

<u>Proposition 48</u> Soient $\chi_1, \dots, \chi_n$ les caractères irréductibles de G. Alors si n_i = degré de χ_i, on a $|G| = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$ et $\forall g \in G$, $g \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} n_i \chi_i(g) = 0$.

<u>III) Représentations et théorie des groupes.</u>

<u>1) Table de caractère d'un groupe et sous groupes distingués.</u>

Ri, O, 2-let, ⊕ p225

<u>Définition 49</u> On définit la table de G comme étant le tableau qui donne les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaisons de G : en lignes on a les caractères, en colonnes les classes de conjugaisons.

<u>Propriétés utiles : 49</u> :

* le nombre de classe de conjugaison est égal au nombre de caractères.
* si on a n caractère χ_i et si n_i = degré de χ_i, on a $|G| = \sum_{i=1}^{n} n_i^2$.
* les lignes sont orthonormales : si $C_1, \dots, C_n$ sont les classes de conjugaisons, $\forall j, k$ $\sum_{i=1}^{n} \chi_j(C_i) \overline{\chi_k(C_i)} \times \frac{|C_i|}{|G|} = \delta_{jk}$.
* les colonnes sont orthogonales : si $j \neq k$, $\sum_{i=1}^{n} \chi_i(C_j) \overline{\chi_i(C_k)} = 0$
* Si χ est un caractère irréductible, si $\tilde{\chi}$ un caractère d'une représentation d'ordre 1, $\tilde{\chi}\chi$ est un caractère irréductible.

<u>Application 50</u> Construction de la table de $\mathfrak{S}_4$ (DVP2) et $\mathbb{D}_3$.

<u>Proposition 51</u> Si V est une représentation de caractère χ, alors $K_\chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\} \triangleleft G$.

<u>Conséquence 52</u> On "lit" des groupes distingués sur la table.

<u>Théorème 53</u> Si $\chi_1, \dots, \chi_n$ sont les caractères irréductibles de G, alors les sous groupes distingués de G sont exactement du type $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, n\}$.

<u>Application 54</u> : on retrouve que $\{id\} \triangleleft V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ et que tous les sous groupes de $\mathbb{H}_8$ sont distingués.

<u>2) Transitivité de l'action d'un groupe.</u>

On considère que G agit sur un ensemble X. Soit π le caractère de la représentation de permutation.

<u>Proposition 55</u> On a, pour $g \in G$, $\pi(g) = |fix(g)|$ où $fix(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$.

<u>Proposition 56</u> Si $Orb(G, X)$ est l'ensemble des orbites de X sous l'action de G, on a $\langle \pi, 1_G \rangle = |Orb(G, X)|$, où 1_G est le caractère unité.

<u>Conséquence 57</u> L'action de G est transitive ssi $\langle \pi, 1_G \rangle = 1$

<u>Exemple 58</u> On retrouve que $\mathfrak{S}_4$ agit transitivement sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

eyré →

Table de $\mathfrak{S}_4$:

	1 [1]	6 [2 1 1]	3 [2 2]	8 [3 1]	6 [4]
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	1	-1
χ_H	3	1	-1	0	-1
$\chi_\varepsilon \chi_H$	3	-1	-1	0	1
χ_2	2	0	2	-1	0

Peyré → Table de Q_8

	{1}	{-1}	{i, -i}	{j, -j}	{k, -k}
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	1	-1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Références : * Jean-Pierre Serre : Représentations linéaires des groupes finis. ← DVP Frobenius.
* Pierre Colmez : Éléments d'analyse et d'algèbre.
* Gabriel Peyré : L'algèbre discrète de la Transformée de Fourier ← DVP $\mathfrak{S}_4$.
* James-Liebeck : Representation and characters of groups.