

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un \mathbb{C} -es. Exemples

107 [LJ] p. 685

Dans ce qui suit, G désigne un groupe fini, \mathbb{K} un corps et E un $\mathbb{K}[G]$ -es de dimension finie.

I Représentations.

a. Définitions élémentaires.

Def 1: Soit $[\mathbb{K}[G]]$ l'ensemble des fonctions de G dans \mathbb{K} muni de la loi suivante pour $\varphi, \psi \in [\mathbb{K}[G]]$:

$$(\varphi + \psi)(g) = (\sum_h \varphi(h) \delta_{hg}) + (\sum_h \psi(h) \delta_{hg}) = \sum_{g \in G} (\varphi(g) + \psi(g)) \delta_{gg}$$

ou: $\delta_g: G \rightarrow \mathbb{K}$
 $h \mapsto \delta_{g,h}$

$([\mathbb{K}[G]], +, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre.

Ex 2: $[\mathbb{C}[Z/nZ]] \cong [\mathbb{C}[X]/(X^n - 1)]$; $[\mathbb{C}[Z/2Z \times Z/3Z]] \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{(X^2 - 1, Y^3 - 1)}$

Def 3: Une représentation de G sur V est la donnée d'une structure de $[\mathbb{K}[G]]$ -module sur V .

Ex 4: On peut munir V de la loi: $(\varphi, v) \in [\mathbb{K}[G]] \times V: \varphi \cdot v = \sum_{g \in G} \varphi(g) \rho(g)v$ et la représentation triviale.

Prop 5: Il est aussi équivalent de se donner un morphisme de groupe $\rho: G \rightarrow GL(V)$.

Prop 6: Il est aussi équivalent de se donner une action de G sur V telle que: $\forall g \in G, \forall v, u \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \rho(g)(v + \lambda u) = \rho(g)v + \lambda \rho(g)u, \rho(1)v = v$.

Ex 7: $([\mathbb{K}[G]], +, \cdot)$ est un $[\mathbb{K}[G]]$ -module. C'est la représentation régulière.

Def 8: Soit V une représentation de G . La dimension de V sur tout \mathbb{K} -es est nommée degré de la représentation.

Ex 9: Le degré de la représentation est $|G|$.

Def 10: Soit V une représentation de G . La représentation est dite fidèle si l'action de G sur V est fidèle.

Def 11: Soit V une représentation de G . Une sous-représentation de G sur V est un sous $[\mathbb{K}[G]]$ -module de V .

Ex 12: Définissons l'action de O_n sur \mathbb{C}^n ainsi: $\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall \sigma \in O_n: \sigma \cdot x = (\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_n x_n) = (\sigma_{11} x_1, \dots, \sigma_{nn} x_n)$

Alors $(1, \dots, 1) \cdot \mathbb{C}$ est une sous-représentation.

Def 13: Soient V et V' deux représentations de G . Un morphisme de V dans V' est un morphisme de $[\mathbb{K}[G]]$ -modules.

b. Les opérations fondamentales de l'algèbre linéaire.

Prop 14: Soient V, V' deux représentations de G . Alors $V \oplus V'$ est une représentation de G muni de la structure: $\forall \varphi \in [\mathbb{K}[G], \forall (v, v') \in V \times V': \varphi(v \oplus v') = \varphi(v) \oplus \varphi(v')$.

Prop 15: Soit V une représentation de G . Alors V^* (dual de V) est une représentation de G muni de la structure: $\forall g \in G, \forall f \in V^*: g \cdot f: V \rightarrow \mathbb{K}$
 $v \mapsto f(g^{-1} \cdot v)$.

Prop 16: Soient V, V' deux représentations de G . Alors $V \otimes V'$ est une représentation de G muni de la structure: $\forall \varphi \in [\mathbb{K}[G], \forall (v, v') \in V \times V': \varphi(v \otimes v') = (\varphi(v) \otimes \varphi(v'))$.

Prop 17: Soient V, V' deux représentations de G , alors: $S_{\mathbb{K}}(V, V')$ est une représentation de G muni de: $g \cdot f: \begin{pmatrix} V \rightarrow V' \\ x \mapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot x) \end{pmatrix}$

Dans ce qui suit: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et V est une représentation de G . On note: $\rho: G \rightarrow GL(V)$ l'action associée.

c. Structure de $[\mathbb{C}[G]$ -module V .

Def 18: V est dite simple si les seules sous-représentations de V sont V et $\{0\}$.

Thm 19 (Lemme de Schur): Soient V, V' deux représentations simples de G . Soit $\varphi: V \rightarrow V'$ un morphisme de représentations. Alors: ou φ est nul ou φ est une homothétie.

Thm 20 (Maschke): Soit V' une sous-représentation de V . Alors il existe V'' sous-représentation de V telle que: $V = V' \oplus V''$.

Cor 21: Toute représentation est somme directe de représentations simples.

Ex 22: Soit G un groupe abélien. Alors $V^* \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C} \cdot v_i$ où les v_i sont les vecteurs propres des endomorphismes de $\rho(G)$.

Ex 23: Sur \mathbb{C}^3 , soit la représentation de O_3 définie comme en ex. 12. $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est simple et $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x+y+z=0\}$ est une sous-représentation simple. D'où: $\mathbb{C}^3 = H \oplus \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

II. Caractères.

a. Premières définitions.

Def 24: Le caractère associé à la représentation $\rho: G \rightarrow GL(V)$ est:

$$\chi_{\rho}: G \rightarrow \mathbb{C}$$

$$g \mapsto \text{Tr}(\rho(g)).$$

Ex 25: Soit $\rho: O_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ définie en ex. 12. Alors:

$$\chi_{\rho}(1) = n = \text{nb de points fixes de } \sigma.$$

[LJ]

[LJ] p. 685 29.

Prop 26: Soient $\rho: G \rightarrow GL(V)$ et $\rho': G \rightarrow GL(V')$ deux représentations de G .

- (i) Si $V = V'$ en tant que représentation, alors $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.
- (ii) $\chi_\rho + \chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $V \oplus V'$.
- (iii) $\bar{\chi}_\rho$ est le caractère associé à V^* .
- (iv) $\chi_\rho \chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $V \otimes V'$.
- (v) $\bar{\chi}_\rho \chi_{\rho'}$ est le caractère associé à $L_G(V, V')$.

Def 27: Un caractère est dit simple si la représentation ρ l'est.

Ex 28: Le caractère d'une représentation de degré 1 est simple.
Le caractère donné en ex. 25 n'est pas irréductible / simple.

6. Fonctions centrales.

Def 29: Soit $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction. f est dite centrale si:
 $\forall (g, h) \in G \times G: f(h) = f(g h g^{-1})$.

Rem 30: Les caractères sont centraux.

Ln 31: La dimension de l'espace des fonctions centrales est égal au nombre de classes de conjugaison dans G .

Def/Prop 32: Soient f, h deux fonctions centrales: $(f, h) \rightarrow \langle f, h \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \bar{h}(g)$
définit un produit scalaire hermitien sur l'espace des fonctions centrales.

Thm 33: Les caractères simples forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales.

Cor 34: Soient $\chi_\rho, \chi_{\rho'}$ deux caractères simples, alors:
ou $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 1$ et $V = V'$
ou $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

a. Résultats sur la structure des $\mathbb{C}[G]$ -module.

Thm 35: Soit V une représentation de G , telle que: $V = \bigoplus_{i \in I} W_i$ où les W_i sont des représentations irréductibles. Soit χ le caractère associé à V , soit χ_ρ le caractère simple associé à V_ρ .

(1) Le nombre des W_i isomorphes à V_ρ est $\langle \chi, \chi_\rho \rangle$. Il est indépendant de la représentation choisie. On le nomme multiplicité de V_ρ dans V .

(2) La sous-représentation: $W_\rho = \bigoplus_{i \in I, W_i \cong V_\rho} W_i \cong \langle \chi, \chi_\rho \rangle V_\rho$ est nommée composante isotypique

(3) On associe à V la décomposition de la canonique: $V = \bigoplus_{\chi \text{ simple}} n_\chi \chi$.

Cor 36: Deux représentations V, V' sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère.

d. Retour sur la représentation régulière.

Ln 37: Soit χ_{reg} le caractère de la représentation régulière:
 $\forall g \in G: \chi_{reg}(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = e \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Prop 38: Soit V_{reg} la représentation régulière. Alors:
 $V_{reg} \cong \bigoplus_{\chi \text{ simple}} (V_\chi)^{\chi(e)}$

Cor 39 (Burnside) On a la formule suivante: $\sum_{\chi \text{ simple}} \chi(e)^2 = |G|$.

e. Table des caractères.

Def 40: Soient $(C_i)_{i \in I, 1, \dots, d}$ les classes de conjugaison dans G . Soient $(\chi_i)_{i \in I, 1, \dots, d}$ les caractères simples. On appelle table des caractères de G la matrice de terme $(\chi_i(C_j))_{i,j}$.

Rmq 41: La matrice ainsi définie est carrée.

Prop 42: Soit U la table des caractères de G , soit $D = \text{Diag}(|C_i|)$.
alors: (i) $U D^t U = |G| I_d$.
(ii) ${}^t U \cdot U = |G| D^2$.
(iii) $\sum \bar{\chi}_i(g) \chi_j(g') = \begin{cases} |C_j| & \text{si } g, g' \text{ sont dans } C_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Ex 43: Table des caractères de C_4 (cf. Annexe A) DVPMT.

Rmq 44: La table des caractères ne caractérise pas le groupe: Q_8 (quaternions d'ordre 8) et D_8 ont même table de caractères et ne sont pas isomorphes.

f. Retour à la théorie des groupes.

Def 45: Soit χ un caractère. On nomme noyau du caractère χ l'ensemble:
 $\text{ker } \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$.

EL] p. 690
29.

[H262]
p. 46
29.

[H162]
p. 46
29.

[882].

Thm 46: Soient χ_1, \dots, χ_r les caractères irréductibles de G deux à deux non isomorphes. Soit H un sous-groupe de G . H est distingué si et seulement si il existe $I \subset \{1, \dots, r\}$ telle que:

$$H = \bigcap_{i \in I} \text{Ker } \chi_i.$$

Ex/Ar. 47: Travaux des sous-groupes de O_4 .

III Vers un sous-corps de \mathbb{C} : \mathbb{R} .

Def 48 Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$. On dit que ρ se réalise sur \mathbb{R} s'il existe une représentation $\rho': G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que, avec $i: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ l'inclusion, on ait: $i \circ \rho'$ est isomorphe à ρ . (En tant que représentation)

Ex 49: La représentation de O_3 ainsi donnée: $\rho((1; 2; 1)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\rho((1; 3; 1)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\rho((2; 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est réalisable sur \mathbb{R} .
 (cf. Annexe D)

Prop 50: Soit $\rho: G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ une représentation irréductible.

On suppose que χ_ρ est à valeurs réelles.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) ρ peut se réaliser sur \mathbb{R} .

(ii) Il existe une forme bilinéaire symétrique non nulle sur \mathbb{C}^n invariante par G .

(iii) On a: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = 1$.

Thm 51: Soit χ le caractère d'une représentation complexe

irréductible de G , on a:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas à valeurs réelles,} \\ 1 & \text{si } \chi \text{ est à valeurs réelles et réalisable sur } \mathbb{R}. \\ -1 & \text{si } \chi \text{ est à valeurs réelles mais n'est pas réalisable sur } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ex. 52: $\rho: D_4 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ est réalisable sur \mathbb{R} .

$$\rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \rho(r) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$\rho: D_8 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{C})$ n'est pas réalisable sur \mathbb{R} .

$$\text{avec } \rho'(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \rho'(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \rho'(K) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

(où $D_8 = \{ \pm 1; \pm I; \pm J; \pm K \}$ avec $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$.)

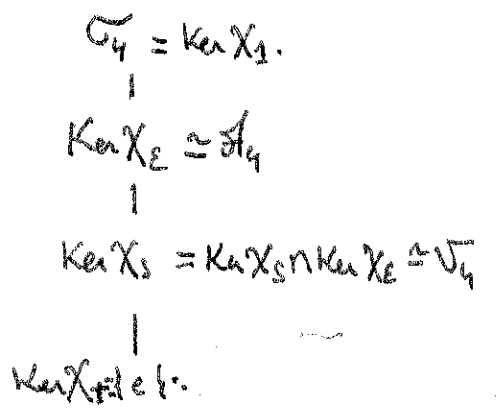
cf. Annexe E.

Annexes.

A. Table de \mathcal{C}_4

\mathcal{C}_4	id	Transposit ^o	3-cycles	Double transposit ^o	4-cycles
X_1	1	1	1	1	1
X_2	1	-1	1	1	-1
X_3	3	1	0	-1	-1
X_4	3	-1	0	-1	1
X_5	2	0	1	2	0

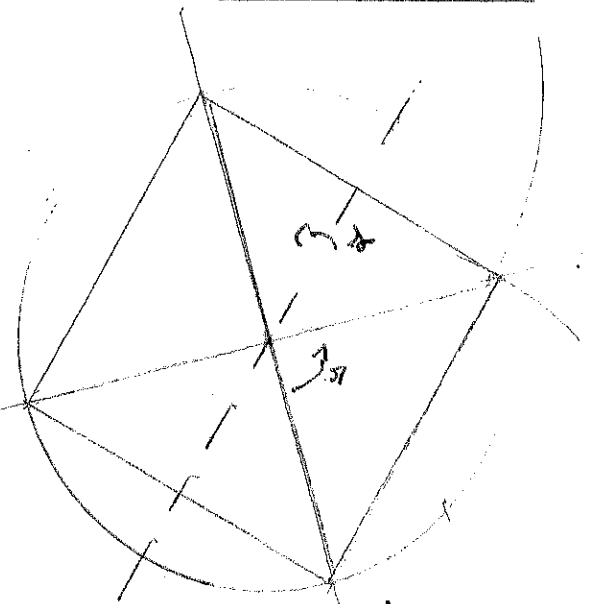
C. Treillis des sous-groupes de \mathcal{C}_4 .



B. Table de \mathcal{H}_8 :

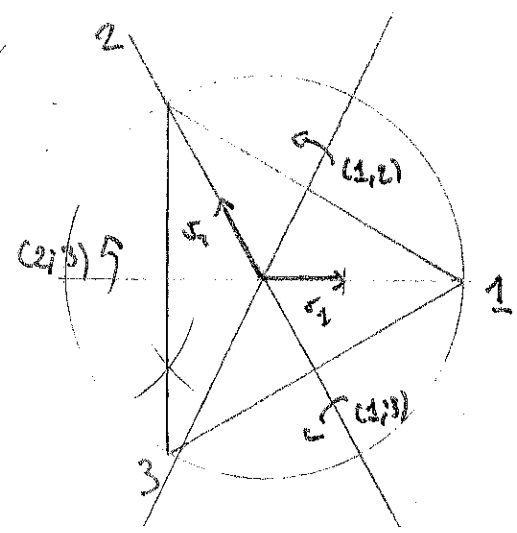
\mathcal{H}	1	-1	$\pm I$	$\pm J$	$\pm K$
X_1	1	1	1	1	0
X_2	1	1	1	-1	-1
X_3	1	1	-1	1	-1
X_4	1	1	-1	-1	1
X_5	2	-2	0	0	0

E. Réalisation réelle de $\rho: \mathcal{D}_4 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$



$\mathcal{D}_4 = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1, \tau^2 = 1, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \rangle$
 $\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; \rho(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D. Réalisation réelle de ρ : visualisation de $\text{Isom}(T) \subseteq \mathcal{C}_3$.



Bibliographie:

- [W1]: Webb, Peter, Algebra in finite group representation theory.
- [LJ]: Long, Serge, Algebra Dunod, 2014 (3ème édition).
- [U]: Ulmer, Felix, Théorie des groupes.
- [H2 [2]]: Histoire Richerche de groupes et géométrie Tome 2 Cartan & Hurwitz.
- [F-H]: Fulton-Harris, Springer-Verlag.

107. REPRÉSENTATIONS ET CARACTÈRES D'UN GROUPE FINI SUR UN C-ESPACE VECTORIEL.

ALEXANDRE EIMER ET MERCEDES HAIECH

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Développements	1
1.1. Tables des caractères, sous-groupes distingués et simplicité	1
1.2. Table de caractère du groupe \mathfrak{S}_4	2

INTRODUCTION

1. DÉVELOPPEMENTS

1.1. Tables des caractères, sous-groupes distingués et simplicité.

Ref : Peyré, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier p230

Soit G un groupe fini et χ un caractère irréductible de G . On note $K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$.

Théorème 1.1.1. *Notons (χ_1, \dots, χ_r) les caractères irréductibles deux à deux non isomorphes de G . Soit H un sous-groupe de G . Alors H est distingué si et seulement s'il existe $I \subset \{1, \dots, r\}$ tel que $H = \bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$.*

Lemme 1.1.2. *Soit G un groupe fini et χ un caractère d'une représentation V de G . Alors $K_\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G .*

Preuve du lemme. Soit (V, ρ) une représentation de G dont χ est le caractère. Nous allons montrer que $K_\chi = \text{Ker}(\rho)$ qui est bien un sous-groupe distingué de G . On rappelle que $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est un morphisme de groupe. Si $g \in \text{Ker}(\rho)$, alors $\rho(g) = \text{Id}_V = \rho(1)$, et finalement $\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g)) = \text{Tr}(\rho(1)) = \chi(1)$. On a bien $\text{Ker}(\rho) \subset K_\chi$.

Réciproquement, soit $g \in K_\chi$. On a $g^{|\mathcal{G}|} = e_G$ par le théorème de Lagrange et donc $\rho(g)^{|\mathcal{G}|} = \rho(g^{|\mathcal{G}|}) = \text{Id}_V$. Finalement l'endomorphisme $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^{|\mathcal{G}|} - 1$ qui est scindé à racines simples sur \mathbb{C} . Donc $\rho(g)$ est diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme $g \in K_\chi$, alors $\chi(g) = \text{Tr}(\text{Id}_V) = n$. Or les λ_i sont des

racines $|G|$ ième de l'unité, ainsi

$$|\chi(g)| = n = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = n.$$

Il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les λ_i sont positivement liés. Comme ils sont tous de module 1 et que leur somme vaut n alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\lambda_i = 1$. Ainsi $\rho(g) = \text{Id}_V$, et donc $g \in \text{Ker}(\rho)$. \square

Preuve du théorème. Une intersection de sous-groupe distingués étant distinguée, le lemme précédent nous assure qu'une intersection du type $\cap_{i \in I} K_{\chi_i}$ est un sous-groupe distingué de G .

Réciproquement, soit H un sous-groupe distingué de G . Notons (V, ρ) la représentation régulière de G/H , et $\pi: G \rightarrow G/H$ la projection canonique. Alors $\rho := \tilde{\rho} \circ \pi$ définit une représentation de G sur V . Comme la représentation régulière est fidèle, alors $\text{Ker}(\rho) = \{0\}$ et ainsi $\text{Ker}(\rho) = H$. Autrement dit $H = K_\chi$, où χ est le caractère associé à la représentation ρ . Décomposons ρ à l'aide des représentations irréductibles de G . Il existe alors des entiers a_1, \dots, a_r tels que $\chi = \sum_{i=1}^r a_i \chi_i$. On a alors pour tout $g \in G$

$$|\chi(g)| \leq \sum_{i=1}^r a_i |\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^r a_i \chi_i(1) = \chi(1).$$

Pour la seconde inégalité on utilise que $|\chi_i(g)| \leq \chi_i(1)$ (voir preuve du lemme). Alors $g \in K_\chi$ si et seulement si ces inégalités sont des égalités, si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on a $a_i \chi_i(g) = a_i \chi_i(1)$. Ce qui revient à demander que $g \in K_{\chi_i}$ à chaque fois que $m_i \neq 0$. On pose $I = \{i \in \{1, \dots, r\} \mid m_i \neq 0\}$. Alors $H \in \cap_{i \in I} K_{\chi_i}$. \square

Corollaire 1.1.3. *Un groupe fini G est simple si et seulement si pour tout caractère irréductible non trivial χ de G et, pour tout $g \in G \setminus \{e_G\}$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$.*

Démonstration. S'il existe un caractère irréductible non trivial χ de G et, pour tout $g \in G \setminus \{e_G\}$, on a $\chi(g) \neq \chi(1)$, alors par le lemme K_χ est un sous-groupe distingué non trivial de G .

Réciproquement si G n'est pas simple, il existe un sous-groupe distingué H non trivial, et d'après le théorème précédent $H = \cap_{i \in I} K_{\chi_i}$. Soit $g \in H$ non trivial alors, pour $i \in I$, on a $g \in K_{\chi_i}$. Cela signifie que $\chi_i(g) = \chi_i(1)$. \square

1.2. Table de caractère du groupe \mathfrak{S}_4 . *Ref : Peyré, l'algèbre discrète de la transformée de Fourier p228*

La première chose à faire est de déterminer les classes de conjugaisons de \mathfrak{S}_4 , le groupe des permutations à 4 éléments. On utilise pour cela le lemme suivant.

Lemme 1.2.1 (Classes de conjugaison dans \mathfrak{S}_n). *Deux éléments de \mathfrak{S}_n sont dans la même classe de conjugaison si et seulement leur décomposition en*

cycle disjoint possède le même nombre de cycles d'une longueur donnée. En particulier, il y a autant de classe de conjugaison dans \mathfrak{S}_n que de partitions de n du type $n = k_1 + k_2 + \dots + k_p$ avec $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p > 0$.

Démonstration. Tout d'abord notons que deux cycles de même longueur sont conjugués. En effet soit $c = (c_1, \dots, c_k)$ et $c' = (c'_1, \dots, c'_k)$, alors ils sont conjugués par la permutation $\sigma : c_i \mapsto c'_i$ et $c = \sigma^{-1} \circ c' \circ \sigma$. Réciproquement il est clair que la conjugaison d'une permutation conjugue aussi les cycles qui la compose et donc conserve leurs longueurs. \square

Les classes de conjugaison de \mathfrak{S}_4 sont donc :

- La classe de l'identité correspondant à la partition $4=1+1+1+1$. Il y a un seul élément dans cette classe.
- La classe des transpositions qui correspond à la partition $4=2+1+1$. Il y a 6 éléments dans cette classe (choix de deux éléments parmi 4 qui restent fixe).
- La classe des 3-cycles correspondant à la partition $4=3+1$. Elle comporte 8 éléments (4 choix de 3 éléments parmi 4 et deux cycles possibles par choix).
- La classe des 4-cycles correspondant à la partition $4=4$. Elle comporte 6 éléments.
- La classe des doubles transpositions à support disjoint correspondant à la partition $4=2+2$. Elle comporte 3 éléments (6 choix possible de transposition, et le choix de la deuxième divise par deux le nombre de possibilités).

On en déduit le nombre de représentations irréductibles de \mathfrak{S}_4 grâce au résultat suivant :

Proposition 1.2.2. *Le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classe de conjugaison de G .*

Nous en déduisons donc que \mathfrak{S}_4 admet à isomorphisme près 5 représentations irréductibles.

On connaît deux représentations irréductibles de \mathfrak{S}_4 .

- La représentation triviale de caractère $\chi_1 = (1, 1, 1, 1, 1)$ (on indexe les colonnes dans le même ordre que celui utilisé pour décrire les classes de conjugaisons).
- La représentation alternée qui correspond à la signature et a pour caractère $\chi_\varepsilon = (1, -1, 1, -1, 1)$.

Considérons maintenant la représentation par permutation de \mathfrak{S}_4 définie par :

$$\begin{aligned} \rho_p: \mathfrak{S}_4 &\rightarrow \text{Gl}_4(\mathbf{C}) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq 4}. \end{aligned}$$

Cette représentation n'est pas irréductible, en effet la droite $\mathcal{D} = \langle (1, 1, 1, 1) \rangle$ est \mathfrak{S}_4 -stable et admet un supplémentaire stable, l'hyperplan $\mathcal{H} = \{x \in \mathbf{C}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. La représentation ρ_p induit sur \mathcal{D} la représentation triviale et sur un \mathcal{H} une certaine représentation que nous noterons ρ_s .

En notant χ_\bullet le caractère associé à la représentation ρ_\bullet , on a $\chi_p = \chi_1 + \chi_s$. Par ailleurs on sait que la valeur de $\chi_p(\sigma)$ correspond au nombre d'éléments laissés fixes par σ ce qui donne $\chi_p = (4, 2, 1, 0, 0)$, d'où $\chi_s = (3, 1, 0, -1, -1)$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_4| \langle \chi_s, \chi_s \rangle &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \chi_s(\sigma) \chi_s(\bar{\sigma}) \\ &= 1\chi_s(\text{Id})^2 + 6\chi_s((12))^2 + 8\chi_s((123))^2 \\ &\quad + 6\chi_s((1234))^2 + 3\chi_s((12)(34))^2 \\ &= 24. \end{aligned}$$

Ainsi $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$ et le caractère χ_s est irréductible.

On peut résumer notre table de caractère ainsi :

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1

Il reste encore deux représentations à déterminer. Notons n_4 et n_5 les dimensions des représentations restant à déterminer. La relation $|\mathfrak{S}_4| = \sum_{i=1}^5 n_i^2$ nous permet de déduire que $n_4^2 + n_5^2 = 13$. On en déduit que nécessairement $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$.

La première représentation peut s'obtenir par l'intermédiaire de la représentation des morphismes sur $W = \mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)$ des représentations standard et alternée. Elle est de degré 3 et son caractère est $\chi_{\mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)} = \chi_s \bar{\chi}_\varepsilon = (3, -1, 0, 1, -1)$. Un calcul montre que $\langle \chi_{\mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)}, \chi_{\mathcal{L}(V_s, V_\varepsilon)} \rangle = 1$. C'est donc une représentation irréductible.

Le dernier caractère peut être déduit de la relation d'orthogonalité des colonnes, à savoir que pour tout $\sigma \neq \text{Id}$, on a $\sum_{i=1}^5 n_i \chi_i(\sigma) = 0$. Finalement, l'on en déduit que $\chi_5 = (2, 0, -1, 0, 2)$.

On a donc la table des caractères complète de \mathfrak{S}_4 .

	Id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-1	0	2
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1