107 Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples

Cadre : V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. G est un groupe.

I _ Généralités sur les représentations linéaires d'un groupe

Déf 1 : Représentation linéaire

Une représentation de G est la donnée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$. Le degré cette représentation est alors défini comme la dimension de l'espace vectoriel V.

Exemple 2 : La représentation triviale notée V_{triv} vérifie $\rho(g) = Id_V$ pour tout $g \in G$, pour tout groupe G.

Exemple 3 : La représentation de permutation

Soit X un ensemble sur lequel G agit. La représentation de permutation associée est la donnée de l'espace vectoriel V de base $(e_x)_{x\in X}$ et de l'action définie par $\rho(g).e_x = e_{gx}$ et étendue par linéarité.

Déf 4 : morphisme de représentation

Etant données deux représentations $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$, un morphisme de représentation de V dans V' est une application f linéaire de V dans V' vérifiant $f\circ\rho(g) = \rho'(g)\circ f$ pour tout $g \in G$. On note $Hom_G(V,V')$ l'ensemble des morphismes de représentation de V dans V'

Exemple 5 : $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $(\rho, \mathbb{R}^2)$ et $(\rho', \mathbb{C})$ les deux représentations définies par : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\rho(\bar{k}) = r_{0, \frac{2ik\pi}{n}}$ et $\rho'(\bar{k}) = e^{\frac{2ik\pi}{n}} Id_{\mathbb{C}}$ sont deux représentations de G.

Et on a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x,y) \to x+iy$ vérifie $f \in Hom_G(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$

Déf 6 : Représentation somme directe

La représentation somme directe $V \oplus V'$ est définie par $g(v \oplus v') = g(v) \oplus g(v')$, $v \in V$, $v' \in V$

Déf 7 : La représentation des morphismes $Hom(V,V')$ est définie par $\rho(g)(\varphi) = \rho(g)\circ\varphi\circ\rho(g)^{-1}$

Déf 8 : La représentation duale V^* est définie par $\rho(g)(\varphi) = \varphi\circ(\rho(g))^{-1}$

Déf 9 : L'ensemble des points fixes de V sous G est le sous-espace vectoriel V^G défini par :

$$V^G = \{ v \in V ,\ \rho(g)(v) = v ,\ \forall g \in G \}$$

Déf 10 Une sous-représentation de V est un sous-espace vectoriel W de V tel que $\rho(g)(W) \subset W$, pour tout g dans G.

Exemple 11 : Soit $f \in Hom_G(V,W)$. Alors $\ker f$ est une sous représentation de V et $\mathrm{im} f$ une sous représentation de W.

Déf 12 : Une représentation V est dite irréductible si elle n'admet aucune sous-représentation distincte de V et de $\{0\}$

Exemples 13 : Toutes les représentations de degré 1, la représentation dans $\mathbb{R}^2$ de D_3 sont irréductibles

Thm 14 : Soit V une représentation de G. Alors toute sous-représentation $W \subset V$ admet un supplémentaire stable, i.e un supplémentaire en tant que représentation

Thm 15 (Maschke) Toute Représentation de degré finie s'écrit comme somme directe de sous-représentations irréductibles

Lemme 16 (Schur)

Soit V_1, V_2 deux représentations irréductibles de G. Alors $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \simeq \begin{cases} 0 & \text{si } V_1 \not\simeq V_2 \\ \mathbb{C} & \text{si } V_1 \simeq V_2 \end{cases}$

II - Caractères de représentation (avec $|G|$ fini)

II - 1) Définitions et premières propriétés

Déf 17 le caractère d'une représentation (ρ, V) est la fonction $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$, $g \to tr(\rho(g))$.

Si V est irréductible, on dit que χ_ρ est irréductible.

Exemple 18 : Pour la représentation par permutation $\chi_\rho(g) \overset{déf}{=} tr(\rho(g)) = \#\{\text{points fixes dans } X\}$

propriétés 19 : • $\chi_\rho(e_G) = \dim V$, $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$, $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$, $\forall h, g \in G$.

• Si on note $\chi_\rho = \chi_V$ où V est l'espace vectoriel associé, alors le caractère de la somme directe est donné par $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$.

• Enfin on a $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)} = \overline{\chi_V} \cdot \chi_W$

Remarque 20 : pour $\chi \in Irr(G)$ (l'ensemble des caractères irréductibles), on note V_χ une représentation irréductible de caractère χ.

Déf 21 : Soit $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$ une décomposition en somme directe de sous-représentations irréductibles. Alors, le nombre de W_i isomorphes à V_χ est appelé multiplicité de V_χ dans V.

II . 2 Orthogonalité

Déf 22 : une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est centrale si pour tout $g, h \in G$ $\varphi(hg) = \varphi(gh)$.

Rmq 23 : Un caractère est une fonction centrale

Déf 24 : L'algèbre $(\mathbb{C}[G], *)$ peut être muni du produit scalaire $(\varphi, \psi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$

on note $R_{\mathbb{C}}(G)$ l'ensemble des fonctions centrales de G vers $\mathbb{C}$.

prop 25 : $\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$ est la projection de V sur V^G

Corr 26 : les caractères irréductibles forment une base orthonormale de $R_{\mathbb{C}}(G)$.

Conséquences 27 :

- Le nombre de représentations irréductibles est inférieur ou égal au nombre de classes de conjugaison
- Si $V_i \in Irr(G)$ alors (χ_V, χ_{V_i}) est la multiplicité de V_i dans V.

- $\chi_V = \chi_W \iff V \simeq W$ au sens des Représentations
- $V \in \mathrm{Irr}(G) \iff (\chi_V, \chi_V) = 1$
- $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim V_\chi)\, \chi(g) = 0, \ \forall g \neq e_G$
- $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim V_\chi)^2 = |G|$

Corrolaires 28

- Une représentation irréductible W apparait $\dim W$ fois dans V.

II.3 - Nombre de representations irréductibles

props 29 : 1) Si $\alpha \in R_C(G)$ alors $\varphi = \sum_{g \in G} \alpha(g)\, \rho(g) \in \mathrm{Hom}(V,V)$

2) le nombre de Représentations irréductible est égal au nombre de classes de conjugaison.

3) $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(g) \overline{\chi(g)} = \frac{|G|}{c(g)}$ où $c(g)$ = nombre de classe de conjugaison

4) $\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(h) \overline{\chi(g)} = 0$ si h et g ne sont pas dans la même classe de conjugaison

Exemple 30 (table de Caractère)

→ Table de S_4 (développement n°1)

		(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2
χ_S	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

- Les groupes $H_8 \not\simeq D_4$ mais ont même table de caractère

III - Représentation et théorie des groupes

Déf 31 : Le groupe dual ou groupe des caractères linéaires est l'ensemble $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ des caractères linéaires.

prop 32. $\widehat{G}$ est un groupe abelien pour la multiplication des valeurs : $(\chi_1 \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$.

props 33 : → Si G est abelien, $\widehat{G}$ est l'ensemble des caractères irréductibles.

→ G est abelien ssi il a $|G|$ caractères irréductibles, tous de degré 1.

prop 34 Si G est non abelien, les caractères irréductibles de degré 1 sont les caractères issus de $G/D(G)$.

Applications 35 : H_8 a donc 4 caractères irréductibles et un caractère de degré 2.

Thm 36 (Structure des groupes abeliens finis)

Soit G un groupe abelien G. Alors il existe $r \in \mathbb{N}$, $n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ avec $n_{j+1} \mid n_j$ telsque

$$G \simeq \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$$ où n_1 est l'exposant de G. (Développement n° 2).

- Bibliographie

* Algèbre et géométrie, Jean Etienne Rombaldi, 2017

* Représentations linéaires des groupes finis, Romagny, 2017

*

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

On va construire la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$.

Étape 1 : La première chose à faire est de déterminer les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$. Comme deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont le même type, on obtient :

— la classe de l'identité qui contient 1 élément

— la classe des transpositions qui contient $\binom{4}{2} = 6$ éléments

— la classe des 3-cycles qui contient $\binom{4}{3} \times 2 = 8$ éléments

— la classe des 4-cycles qui contient $3 \times 2 = 6$ éléments

— la classe des doubles transpositions qui contient 3 éléments.

Il y a donc 5 classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$. On en déduit que $\mathfrak{S}_4$ admet 5 caractères irréductibles.

Étape 2 : On connaît deux représentations (irréductibles) de degré 1, la représentation triviale et la représentation alternée qui correspond à la signature. On peut donc remplir les deux premières lignes.

	1	6	8	6	3
	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1

Étape 3 : On considère maintenant la représentation par permutation. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$, alors $\mathfrak{S}_4$ agit sur $\mathbb{C}^4$ par permutation des éléments de la base $\mathcal{B}$ ce qui permet de définir un morphisme

$$\begin{aligned} \sigma_p : \mathfrak{S}_4 &\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}^4) \\ \sigma &\mapsto \{e_i \mapsto e_{\sigma(i)}\} \end{aligned}$$

On note χ_p le caractère associé, alors $\chi_p(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ. On en déduit que $\chi_p = (4, 2, 1, 0, 0)$. Par ailleurs, si on pose $H_0 = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 1, 1))$ alors on voit que H_0 est stable par $\mathfrak{S}_4$ et admet un supplémentaire stable $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$. De plus σ_p induit sur H_0 la représentations triviale. En notant σ_s la représentation induite sur H_1 (de degré 3), on a la relation $\chi_p = \chi_s + \chi_1$. D'où $\chi_s = (3, 1, 0, -1, -1)$. Pour montrer que σ_s est irréductible, on calcule

$$|\mathfrak{S}_4| \langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1 \times 3^2 + 6 \times 1^2 + 8 \times 0^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2 = 24$$

donc $\langle \chi_s, \chi_s \rangle = 1$ et σ_s est bien irréductible.

Étape 3 : Il reste encore deux représentations à déterminer. En utilisant la relation sur les degrés, on a $1^2 + 1^2 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = 24$. On a donc nécessairement une représentation de degré 3 et l'autre de degré 2. Pour la première, on regarde la représentation des morphismes $V_c = \mathrm{Hom}(V_s, V_\epsilon)$ des représentations standard et alternée. Elle est de degré 3 et a pour caractère $\chi_c = \overline{\chi_s}\chi_\epsilon = (3, -1, 0, 1, -1)$. On remarque que le caractère est différent de ceux qu'on a déjà déterminés et vérifie $\langle \chi_c, \chi_c \rangle = 1$. La représentation est donc irréductible et on a

	1	6	8	6	3
	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_c	3	-1	0	1	-1
χ_5	2				

Étape 4 : Pour déterminer le dernier caractère, on utilise l'orthogonalité des colonnes. On a donc $\chi_5 = (2, 0, -1, 0, 2)$ et on obtient la table des caractères :

	1	6	8	6	3
	id	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_c	3	-1	0	1	-1
χ_5	2	0	-1	0	2

Remarque. *On peut trouver le caractère χ_c en utilisant l'isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \stackrel{\sim}{=} Isom^+(cube)$ où $Isom^+(cube) \langle \ \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$ est le groupe des isométries positives du cube. Une transposition s'identifie alors à une rotation d'angle σ autour d'un axe relient les milieux de deux côtés opposés ; un 3-cycle s'identifie à une rotation d'angle $2\sigma/3$ autour d'une grande diagonale ; un 4-cycle s'identifie à une rotation d'angle $\sigma/2$ autour d'un axe de coordonnées ; et une double transposition est identifiée à une rotation d'angle σ autour d'un axe de coordonnées.*

Référence : Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier.*

Théorème de structure des groupes abéliens finis

On considère G un groupe abélien fini dont l'élément neutre est noté e.

Proposition. *L'application*

$$\begin{aligned} \iota\colon G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\longmapsto \iota_g \end{aligned}$$

est un isomorphisme de groupes, où $\iota_g(\chi) := \chi(g)$ pour $g \in G$ et $\chi \in \widehat{G}$.

Démonstration. Soient $g, h \in G$ et $\chi \in \widehat{G}$. On a

$$\iota_{gh}(\chi) = \chi(gh) = \chi(g)\chi(h) = \iota_g(\chi)\iota_h(\chi)$$

et ι est un morphisme de groupes. Maintenant si H est un groupe abélien fini, alors on sait que $|H|$ est égal au nombre de classes de conjugaison de H, lui-même égal au nombre de caractères irréductibles. Donc $|H| = |\widehat{H}|$. En utilisant ce résultat pour G et $\widehat{G}$, on en déduit que $|G| = |\widehat{\widehat{G}}|$. Il suffit alors de montrer que ι est injectif. Soit $g \in G$ tel que $\iota(g) = 1$. Alors $\chi(g) = 1$ pour tout $\chi \in \widehat{G}$. On considère la fonction δ_g, qui est centrale puisque G est abélien. On sait que les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales sur G, donc

$$\delta_g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \langle \delta_g, \chi \rangle \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{\chi(g)} \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi$$

En particulier, $\delta_g(e) = |\widehat{G}|/|G| = 1$ et $g = e$. □

Lemme. *G et $\widehat{G}$ ont même exposant.*

Démonstration. Soit H un groupe abélien fini et notons $n(H)$ son exposant. Soit $\chi \in \widehat{H}$, alors pour tout $h \in H$,

$$\chi(h)^{n(H)} = \chi(h^{n(H)}) = \chi(e) = 1$$

et on en déduit que $n(\widehat{H})$ divise $n(H)$. En appliquant ceci à G et $\widehat{G}$, on obtient

$$n(\widehat{\widehat{G}}) \leq n(\widehat{G}) \leq n(G)$$

mais $\widehat{\widehat{G}} \cong G$ donc $n(\widehat{\widehat{G}}) = n(G)$, ce qui permet de conclure. □

Théorème. *Il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $n_2, \dots, n_r$ avec $n_{j+1} | n_j$ tels que $G \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/n_j\mathbb{Z}$ où n_1 est l'exposant de G.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $|G|$. Si $|G| = 1$, le résultat est évident avec $r = 0$. Supposons $|G| > 1$ et notons n_1 l'exposant de G. D'après le lemme, n_1 est aussi l'exposant de $\widehat{G}$ et il existe $\chi \in \widehat{G}$ d'ordre n_1. Alors $\chi(G)$ est un sous-groupe du groupe $\mathbb{U}_{n_1}$ des racines n_1-ièmes de l'unité, donc de la forme $\mathbb{U}_l$ avec $l | n_1$. Comme χ est d'ordre n_1, forcément $l = n_1$. En particulier, il existe $g \in G$ tel que $\chi(g) = \exp(2i\pi/n_1)$. On pose alors $H = \langle g \rangle$. Or l'ordre de $\chi(g)$, égal à n_1, divise l'ordre de g. Par ailleurs, par définition de n_1, l'ordre de g divise n_1. Donc g est d'ordre n_1 et $H \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}$. Pour conclure, il suffit alors de montrer que $G = H \oplus \ker \chi$ et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\ker \chi$ dont l'exposant divise n_1. Pour cela, on remarque que χ induit un isomorphisme de H dans $\mathbb{U}_{n_1}$ puisqu'il est surjectif (car $\chi(g)$ engendre $\mathbb{U}_{n_1}$) et que les deux groupes ont même cardinal n_1. On note α son inverse. Soit $x \in G$, on pose

$$\begin{aligned} a &= \alpha(\chi(x)) \\ b &= a^{-1}x \end{aligned}$$

Alors $a \in H$ et $b \in \ker \chi$ car $\chi(b) = \chi(a)^{-1}\chi(x) = 1$, d'où $x = ab \in H \ker \chi$. Enfin, $H \cap \ker \chi = \{e\}$ puisque χ est injectif sur H. Ceci montre que $G = H \oplus \ker \chi$. $\square$

Référence : Colmez, *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres).*