107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-ev. Exemples.

Cadre : G désigne un groupe fini

I - Représentations linéaires de groupes [Serre et Rauch]

① Définitions et premiers exemples

Def 1 : Représentation linéaire de G : la donnée de (ρ, V) où V est un espace vectoriel
$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ morphisme

Def 2 : Lorsque $\dim V < +\infty$, on l'appelle degré de la représentation.

Ex 3 : Représentation de degré 1 : morphisme $\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

Ex 4 : Représentation triviale de degré d : $\rho : G \longrightarrow GL_d(\mathbb{C})$
$g \longmapsto Id$

Ex 5 : Si G agit sur un ensemble fini X, en notant $V = Vect_{\mathbb{C}}(\{e_x\}_{x \in X})$, $\rho : G \longrightarrow GL(V)$
$g \longmapsto (e_x \longmapsto e_{g.x})$
est une représentation de G de degré $|X|$.

Ex 6 : Pour $\mathfrak{S}_3$: • via l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^3$ par permutation des coordonnées
• (signature, $\mathbb{C}$)

Def 7 : Deux représentations de G, (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme $f : V_1 \longrightarrow V_2$ G-équivariant
ie $\forall g \in G$, $\rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g)$.

Ex 8 : $G = \mathbb{D}_3 \simeq \mathfrak{S}_3$. Deux rep équivalentes :
* action de $\mathbb{D}_3$ sur $\mathbb{R}^2$ par isométries
* action de $\mathfrak{S}_3$ par permutation des coor. sur H
$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } x+y+z=0\}$

② Algèbre $\mathbb{C}[G]$ et représentation régulière

Def 9 : $\mathbb{C}[G]$ = fonctions de G dans $\mathbb{C}$.

Def 10 : Produit scalaire hermitien : $\langle f, g\rangle := \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$

Prop 11 : $\left\{ \delta_g : h \in G \longmapsto \begin{matrix} 1 \text{ si } h = g \\ 0 \text{ sinon} \end{matrix} \right\}_{g \in G}$ est une base de $\mathbb{C}[G]$

Def 12 : Pour $g, h \in G$, on pose $\delta_h * \delta_g := \delta_{hg}$
En le prolongeant par bilinéarité à $\mathbb{C}[G]$ on obtient pour $f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$ et $g \in G$
$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$.

Prop 13 : $*$ commutatif ssi G abélien

Def 14 : Représentation régulière $\rho : G \longrightarrow GL(\mathbb{C}[G])$
$g \longmapsto (f \longmapsto \delta_g * f)$

Prop 15 : Cette représentation est fidèle (ie ρ injectif)

③ Sous-représentation

Def 16 : Une sous-représentation de (ρ, V) est un sous-espace vectoriel de V invariant par G (ie stable par $\rho(g)$ $\forall g \in G$)
$(\rho|_W, W)$

Ex 17 : $Vect(\sum_{g\in G} \delta_g)$ est une sous-représentation de la représentation régulière, isomorphe à la représentation triviale.

Prop 18 : Si V_1, V_2 deux rep de G et $f : V_1 \longrightarrow V_2$ G-équivariant, Alors $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-représentations de G.

Def 19 : opérateur de moyenne : pour $u \in End(V_1, V_2)$,
$\Pi u = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_2(g)^{-1} \circ u \circ \rho_1(g)$

Théorème 20 : Soit (ρ, V) représentation linéaire de G et W sev de V stable par G.
Il existe un supplémentaire de W dans V stable par G.

Ex 21 : $Vect(\sum_{g\in G}\delta_g)$ admet $H := \{\sum_{g\in G} a(g).g \in \mathbb{C}[G] \text{ tq } \sum_{g\in G} a(g) = 0\}$ comme supplémentaire G-stable pour la représentation régulière.

4) Représentations irréductibles

Def 22 : Une rep. lin. de G est *irréductible* (ou simple) si : $V \neq 0$ et V n'a pas de sev strict non nul G-stable.

Def 23 : *Somme directe* de deux rep : $(\rho_1 \oplus \rho_2, V_1 \oplus V_2)$ où $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(\underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2}) = \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)$

Th 24 : Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles.

Ex 22 bis : L'action naturelle de $\mathbb{D}_3$ sur le triangle est irréductible

Ex 25 : L'action de $\mathfrak{S}_3$ sur $\mathbb{R}^3$ se décompose en $\rho = id + \rho_{\mathbb{D}_3}$ où $\rho_{\mathbb{D}_3}$ est l'action naturelle de $\mathbb{D}_3$ sur $\mathbb{R}^2$.

Rq 26 : Une telle décomposition n'est pas unique

C-ex 27 : Représentation triviale : Toute droite est G-stable

On a une infinité de décompositions en $\oplus$ de sev de dim 1.

Lemme 28 (Schur) : Soit (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux rep. irréductibles de G. et $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ G-équivariant. Alors (i) Si $V_1 \not\simeq V_2$, $f = 0$

(ii) Si $V_1 \simeq V_2$, f est un isomorphisme, et même une homothétie si $(\rho_1, V_1) = (\rho_2, V_2)$

Coro 29 : $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_1 \simeq V_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Appli 30 : Si G est abélien, toute représentation irréductible est de degré 1.

II – Caractères d'une représentation [Serre et Rauch]

1) Définitions et exemples

Def 31 : Caractère de (ρ, V) : $\chi_\rho : g \in G \longmapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$

Ex 32 : Pour l'action de $\mathbb{D}_3$ sur le triangle, $\chi(s^\varepsilon r^k) = 2\varepsilon \cos(2\pi \frac{k}{3})$ pour $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Prop 33 : Si χ caractère d'une rep de degré n, (i) $\chi(e) = n$ (ii) $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (iii) $\chi(hgh^{-1}) = \chi(g)$

Rq 34 : (iii) signifie que χ est une fonction *centrale*

Prop 35 : (ρ_1, V_1) et (ρ_2, V_2) deux rep. de caractères χ_1 et χ_2.
Le caractère de $V_1 \oplus V_2$ vaut $\chi_1 + \chi_2$.

2) Orthogonalité

Th 36 : Soit χ, χ' les caractères de deux rep. irréductibles
Alors $\langle \chi, \chi' \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si les rep sont isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Appli 37 : $f \in \mathcal{F}(G)$ est un caractère ssi f est combinaison dans $\mathbb{N}$ de caractères irréductibles.

Prop 38 : Les caractères irréd. forment une base orthonormée du sev des fonctions centrales de $\mathcal{F}(G)$

Prop 39 : Si V_1, V_2 deux représentations, $\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2) = \langle \chi_{V_1}, \chi_{V_2} \rangle$.

Cor 40 : Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre de classes de conjugaison de G.

3) Application à la décomposit° des représentat°

Th 41 : Soit V rep de caractère χ et $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ sa décomposition en irréductibles.
Alors $\forall i \in [\![1, k]\!]$, le nb de rep. irréductibles dans la décomposition isomorphes à W_i vaut $\langle \chi, \chi_i \rangle$

Cor 42 : Ce nombre est indépendant de la décomposition

Cor 43 : Si $V = m_1 W_1 \oplus \dots \oplus m_h W_h$, $W_1 \dots W_h$ irréd non isomorphes, Alors $\langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i=1}^{h} m_i^2$

Th 44 : χ irréductible ssi $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Prop 45 : Deux représentations ont même caractère ssi elles sont isomorphes.

Prop 46 : Chaque rep irred W_i est contenue dans la rep. régulière un nb de fois égal à son degré.

Prop 47 : Le degré des rep. irred. divise l'ordre de G.

④ Table de caractères

Rauch

Def 48 : Table de caractère : une colonne par classe de conjugaison, avec effectif, et une ligne par caractère irréductible.

Ex 49 : Voir annexe pour tables de $\mathbb{D}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

Prop 50 : Les lignes de la table sont orthonormales quand on tient compte de l'effectif des classes (cor 36)

Prop 51 : Les colonnes de la table sont orthogonales

Peyré

Th 52 : On note $\chi_1, \dots, \chi_r$ les caractères irred de G. et $K_{\chi_i} = \{g \in G \text{ tq } \chi_i(g) = \chi_i(e)\}$

Alors les ssgpes distingués de G sont exactement de la forme $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, r\}$

Cor 53 : G est simple ssi pour tout χ irred non trivial et $\forall g \in G \setminus \{e\}$, $\chi(g) \neq \chi(e)$.

| DEV 1

Appli 54 : Le seul ssgpe normal de $\mathbb{D}_3$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

III - Cas d'un groupe abélien, Dualité

① Représentation irréductible et caractères

Serre

Prop 55 : G commutatif ssi les χ irred sont de dim 1

Prop 56 : Les caractères irréductibles de G sont alors des morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$.

② Dual $\widehat{G}$

Peyré

Def 57 : $\widehat{G} = \{\chi \text{ morphisme de } G \text{ dans } \mathbb{C}^\times\}$

Prop 58 : ce sont en fait des morphismes dans $\mathbb{U}_{|G|}$

Rq 59 : $\widehat{G} = \{$caractères de rep. irréductibles$\}$ donc $\widehat{G}$ base orthonormée de $\mathbb{C}[G]$.

Prop 60 : (Cas cyclique) Pour $G = \langle g_0 \rangle$, $|G| = n$.
$$\widehat{G} = \{\chi_j : g_0^k \longmapsto e^{\frac{2i\pi}{n}kj} = (\omega_j)^k\}_{j \in [\![0, n-1]\!]}$$

Thm 61 : (Cas général) $\widehat{G} \simeq G$ (non canonique)

Thm 62 : $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ canonique
$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow \widehat{\widehat{G}} \\ g &\longmapsto (\Phi_g : \chi \longmapsto \chi(g)) \end{aligned}$$

③ Transformée de Fourier

Def 63 : coefficient de Fourier : $f \in \mathbb{C}[G]$ et $\chi \in \widehat{G}$
$c_f(\chi) := \langle f, \chi \rangle$

Def 64 : Transformée de Fourier : $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[\widehat{G}]$, $f \mapsto \widehat{f}$
avec $\widehat{f}(\chi) =: |G| . c_f(\overline{\chi}) = \sum_{g \in G} f(g) \chi(g)$

Prop 65 : Formule d'inversion : $f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi^{-1}$

Prop 66 : c et $\mathcal{F}$ sont des isomorphismes d'ev.

Def 67 : produit de convolution : $\delta_g * \delta_h = \delta_{gh}$ et extension par bilinéarité : $(f_1 * f_2)(g) = \sum_{h \in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)$

Prop 68 : $\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}$

Appli 69 : Calcul du déterminant circulant et convergence d'une suite de polygônes vers l'isobarycentre.

| DEV 2

(Annexe 2)

Annexe 1.

Table de caractères de $\mathbb{D}_3$

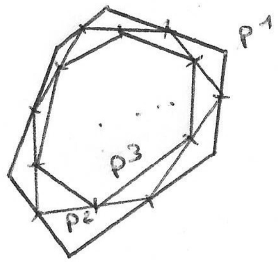
$\mathbb{D}_3$	$\{e\}$	$\{r, r^2\}_2$	$\{s, sr, sr^2\}_3$	
χ_1	1	1	1	
χ_2	1	1	-1	$\leftarrow \rho : r \mapsto 1,\ s \mapsto -1$
χ_3	2	-1	0	$\leftarrow$ action sur le triangle

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

[Serre ou Rauch]

$\mathfrak{S}_4$	id_1	$(a\ b)_6$	$(a\ b)(c\ d)_3$	$(a\ b\ c)_8$	$(a\ b\ c\ d)_6$
χ_1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ_2	2	0	2	-1	0
χ_3	3	1	-1	0	-1
χ_4	3	-1	-1	0	1

Annexe 2



Suite de polygônes.

Ref : Peyré : L'algèbre discrète de la transformée de Fourier

Serre : Représentations linéaires des groupes finis

Rauch : Les groupes finis et leurs représentations