107

Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel

Dans toute la leçon G désignera un groupe fini d'ordre n et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d.

I. Semi-simplicité des représentations

I.1. Des définitions et beaucoup d'exemples

Déf. 1 Une représentation linéaire de G dans V est un homomorphisme $\rho : G \to GL(V)$.

Ex. 2 La rep. triviale, $\rho_{triv} : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto Id_V \end{array}$.

Ex. 3 Quand $d=1$, les rep. sont des morphismes $\rho : G \to \mathbb{C}^*$

Ex. 4 Une rep. de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est exactement la donnée de $u \in GL(V)$ t.q $u^n = 1$.

Ex. 5 $\mathbb{C}^2$ est une rep. de S_3.

Déf. 6 Soient $\begin{cases} G \xrightarrow{\rho} GL(V) \\ G \xrightarrow{\rho'} GL(V') \end{cases}$ deux rep. On dit qu'une appli. linéaire $f : V \to V'$ est un morphisme de ρ dans ρ' ssi $\forall g \in G$, $f \circ \rho_g = \rho'_g \circ f$. Si f est bijective on dit que ρ et ρ' sont isomorphes.

Déf. 7 Soit $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ une rep. et W un sev de V. Si W est G-stable, i.e $\forall g \in G$, $\rho_g(W) \subset W$, alors celui-ci fournit une rep. appelée sous-représentation de G.

Ex. 8 Si $V \xrightarrow{f} V'$ est un morphisme de rep. alors $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont resp. des sous-rep. de V et V'.

Rem. 9 Le 1er th. d'isomorphisme reste vrai pour les rep.

Ex. 10 La rep. quotient, $\rho : G \to GL(V)$ induit $\bar{\rho} : G \to GL(V/W)$

Ex. 11 La rep-somme directe, $\begin{cases} G \xrightarrow{\rho} GL(V) \\ G \xrightarrow{\rho'} GL(V') \end{cases}$ donnent $\rho \oplus \rho' : \begin{array}{l} G \to GL(V \oplus V') \\ g \mapsto v \oplus v' \mapsto \rho_g(v) \oplus \rho'_g(v') \end{array}$.

Ex. 12 La rep. régulière, si $d = n$, on construit $\rho_{reg} : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto e_t \mapsto e_{g \cdot t} \end{array}$

Ex. 13 La rep. de permutation si $G \curvearrowright X$ fini et $\dim(V) = \# X$ on construit $\rho_{perm} : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ g \mapsto e_x \mapsto e_{g \cdot x} \end{array}$

Th. 14 (Brauer) Si on considère la rep. rég. de S_n et que l'on note M_σ la matrice de permutation associée à $\rho_{reg}(\sigma)$ alors M_σ et $M_{\sigma'}$ sont semblables ssi σ et σ' sont conjuguées dans S_n.

I.2. Irréductibilité et conséquences

Déf. 15 Une rep. est dite irréductible ou simple si les seuls sev G-stables sont $\{0_V\}$ et V. On dit qu'elle est semi-simple si elle est somme directe de sous-rep. simples.

Ex. 16 Toute rep. de degré 1 est irréductible.

Th. 17 (Maschke) Toute rep. de degré fini est semi-simple.

Rem. 18 Cette décomposition n'est pas unique.

Lemme 19 (Schur) Soient $\begin{cases} G \xrightarrow{\rho^1} GL(V_1) \\ G \xrightarrow{\rho^2} GL(V_2) \end{cases}$ deux rep. irréductibles et $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ un morphisme de rep. Alors : (i). Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, $f = 0$. (ii). Si $\begin{cases} V_1 = V_2 \\ \rho^1 = \rho^2 \end{cases}$ f est une homothétie.

Coro. 20 Soient $\begin{cases} G \xrightarrow{\rho^1} GL(V_1) \\ G \xrightarrow{\rho^2} GL(V_2) \end{cases}$ deux rep. irréductibles et $V_1 \xrightarrow{A} V_2$ linéaire. Alors $A^\circ := \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \rho^2_g A \rho^1_{g^{-1}}$ vaut 0 si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes et vaut $\frac{\operatorname{Tr} A}{\dim V_1} Id_{V_1}$ lorsque $(V_1, \rho^1) = (V_2, \rho^2)$.

II. Théorie des caractères et applications à la théorie des groupes

II. 1. Orthogonalité des caractères

Déf. 21 On appelle caractère de la rep. $\rho : G \to GL(V)$ la fonction $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto Tr(\rho_g)$.

Prop. 22 Si χ est un caractère, alors : (i) $\chi(1) = d$. (ii) $\forall g \in G$, $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ (iii) $\forall g, h \in G$, $\chi(ghg^{-1}) = \chi(h)$

Ex. 23 Si ρ^1 et ρ^2 sont deux rep. de caractères resp. χ_1 et χ_2 alors $\chi_{\rho^1 \oplus \rho^2} = \chi_1 + \chi_2$.

Ex. 24 Si $V = \mathbb{C}^m$ et $G \subset S_m$, pour $g \in G$, $\chi_{perm}(g) = \#\{i, g \cdot i = i\}$.

Ex. 25 $\chi_{reg}(g) = \begin{cases} m & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Déf. 26 Soit $f : G \to \mathbb{C}$, f est dite centrale sur G si elle est constante sur les classes de conjugaison de G.

Ex. 27 Les caractères sont des fcts centrales.

Déf. 28 Pour $\begin{cases} \varphi : G \to \mathbb{C} \\ \psi : G \to \mathbb{C} \end{cases}$ on pose $(\varphi | \psi) := \frac{1}{m} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}$

C'est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fcts centrales sur G.

Th. 29 (Frobenius) Les caractères irréd. forment une base orthonormale de l'espace des fcts centrales.

Th. 30 Deux représentations sont isomorphes ssi leurs caractères sont égaux.

Th. 31 Si χ est un caractère alors $(\chi | \chi)$ est un entier positif et $(\chi | \chi) = 1$ ssi χ est irréductible.

Prop. 32 (Burnside) En notant $\chi_1, \dots, \chi_h$ les caractères irréd. de G et $n_1, \dots, n_h$ leurs degrés respectifs, on a :

(i). $\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = m$

(ii). Si $s \neq 1$, $\sum_{i=1}^{h} n_i \chi_i(s) = 0$.

Th. 33 Le nombre de rep. irréd. de G est égal au nombre de classes de conj. de G.

App. 34 Tout groupe d'ordre 4 est abélien.

II. 2. Tables et noyaux de caractères

Déf. 35 On note c le nombre de classes de conj. dans G. La table de caractères de G est un tableau $c \times c$ dont les coeff. sont les valeurs des caractères irréd. sur les classes de conj.

Déf. 36 La représentation unité $\rho_u : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto 1$ fournit le caractère unité $\chi_u : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto 1$.

Ex. 37 ($G = C_m$ le gp cyclique d'ordre m) $\omega_m := e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

	χ_u	χ_1	$\dots$	χ_m
1	1	1	1	1
g	1	ω_m	$\dots$	ω_m^{m-1}
g^2	1	ω_m^2	$\dots$	$\omega_m^{2(m-1)}$
$\vdots$	1	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
g^{m-1}	1	ω_m^{m-1}	$\dots$	$\omega_m^{(m-1)(m-1)}$

Ex. 38 ($G = S_3$)

	χ_u	ε	χ_3
Id	1	1	2
(1, 2)	1	−1	0
(1, 2, 3)	1	1	−1

Ex. 39 ($G = \mathfrak{A}_5$)

	χ_u	χ_{std}	γ	ψ_1	ψ_2
Id	1	4	5	3	3
(12)(34)	1	0	1	−1	−1
(123)	1	1	−1	0	0
(12345)	1	−1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
(22354)	1	−1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Déf. 40 $K_{\chi_\rho} := \{g \in G, \chi_\rho(g) = \chi_\rho(1)\}$ est le noyau du caractère χ_ρ.

Prop. 41 $K_{\chi_\rho} = Ker\, \rho$

Th. 42 On note $\rho_1, \dots, \rho_r$ des représentants des rep. irréd. non isomorphes de G. Les sous-gp distingués de G sont exactement du type $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, r\}$.

Cor. 43 G est simple ssi $\forall i \neq 1$, $\forall g \neq 1 \in G$ $\chi_i(g) \neq \chi_i(1)$.

App. 44 Simplicité de $\mathfrak{A}_5$.

1

III. Un cas particulier : les groupes abéliens

On supposera désormais G abélien.

III.1. Dualité et structure des GAF

Déf. 45 Le dual de G, noté $\widehat{G}$, est l'ensemble des caractères irréductibles de G.

Prop. 46 $\mathrm{Card}(\widehat{G}) = \mathrm{Card}(G)$ et toute rep. irréd. de G est de degré 1.

Rem. 47 On peut voir cette prop. comme conséquence de la codiagonalisation.

Ex. 48 $\widehat{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{U}_m \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Prop. 49 Soient A et B deux groupes abéliens finis, alors
1. $\widehat{A} \times \widehat{B} \simeq \widehat{A \times B}$
2. $A \simeq \widehat{\widehat{A}}$.

2

Th. 50 (relèvement des caractères) Soit $H \leq G$, le morphisme de restriction de $\widehat{G}$ vers $\widehat{H}$ est surjectif, i.e. tout caractère de H peut être relevé en un caractère de G.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, dashed, "\tilde{\chi}"] & \\ H \arrow[u, hook, "j"] \arrow[r, "\chi"'] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

Prop. 51 Toute fct de G est somme de caractères.

Th. 52 (structure des groupes abéliens finis) Il existe un entier non nul s et une unique famille $(a_i)_{i \in \{1,\dots,s\}}$ d'entiers tels que :
1. $\forall k \in \{1,\dots,s-1\}$, $a_{k+1} \mid a_k$.
2. $G \simeq \mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/a_s\mathbb{Z}$.

Coro. 53 G et $\widehat{G}$ sont isomorphes.

Prop. 54 En notant k le nombre de classes de conj. de G on a $k \leq \frac{|G| + 3[G : D(G)]}{4}$.

III.2. Algèbre des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ et transformée de Fourier

Déf. 55 On note $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre des fcts de G dans $\mathbb{C}$ dont une base est $(\delta_g)_{g \in G}$ où $\delta_g(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = g \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Les caractères irréductibles de G forment une autre base de $\mathbb{C}[G]$.

Rem. 56 On peut doter $\mathbb{C}[G]$ du même produit hermitien que celui de la déf. 28.

Déf. 57 La transformée de Fourier discrète est l'application
$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccl} \mathbb{C}[G] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\widehat{G}] \\ f & \longmapsto & \mathcal{F}(f) : \chi \longmapsto \sum_{g \in G} f(g)\chi(g) \end{array}$$

Th. 58
1. La transformée de Fourier est un isomorphisme d'algèbres.
2. Sa réciproque est donnée par : $\forall \hat{f} \in \mathbb{C}[\widehat{G}]$, $f = \frac{1}{n} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \hat{f}(\overline{\chi})\chi$.

Coro. 59 En notant $\mathrm{Dir}(D)$ l'ensemble des caractères de $(\mathbb{Z}/D\mathbb{Z})^*$, si G est d'ordre D et a est un entier premier à D, alors :
$$\frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi \in \mathrm{Dir}(D)} \overline{\chi(a)}\,\chi(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv a\,[D] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$