Leçon 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Exemples.

On considère G un groupe fini.

I) Représentation d'un groupe fini.

1) Représentations et irréductibilité

Def 1 : Une représentation de G est la donnée (ρ, V) d'un $\mathbb{C}$-ev V et d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$.
La dimension d'une telle représentation est celle de V.

Rem 2 : De manière équivalente, une représentation est la donnée d'une action linéaire de G sur V.

Ex 3 : - Tout ev V induit une représentation triviale V^{triv} avec $\rho : g \mapsto Id_V$.
- Tout sous groupe G de $GL(V)$ induit une sous représentation avec ρ l'inclusion.
- Si on considère D_3 comme sous groupe de $GL(\mathbb{R}^2) \subset GL(\mathbb{C}^2)$ des isométries laissant stable le triangle équilatéral, alors on obtient une représentation de S_3.
- Si $|G| = n$ et $V = Vect(e_g)_{g \in G}$, alors on défini la représentation régulière par $\rho : G \to GL(V)$

$$h \mapsto \rho_h : V \to V, \quad e_g \mapsto e_{hg}$$

Rem 4 : On notera $g_V = \rho(g)$ pour $g \in G$.

Prop 5 : Soient V une représentation de G et $g \in G$, g_V est diagonalisable.

Ct ex 6 : La représentation $\rho : O_2(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable pour tout $g \in O_2(\mathbb{R})$.

Def 7 : Soit V une représentation de G. Une sous représentation de V est un sev $W \subset V$ G-stable i.e $\forall g \in G, g_V(W) \subset W$

Ex 8 : On pose $H = \{x+y+z=0\} \subset \mathbb{C}^3$ et $\rho : S_3 \to GL_3(\mathbb{C})$, $\rho(\sigma)(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$
H est une sous représentation de $(\rho, \mathbb{C}^3)$.

Def 9 : Une représentation V de G est irréductible si $V \neq \{0\}$ et si les seuls sev de V, G-stables sont $\{0\}$ et V. On note $Irr(G)$ l'ensemble des représentations irréductibles.

Ex 10 : La représentation H de S_3 de l'exemple 8 est irréductible

Prop 11 : Si $\dim(V) = 1$, la représentation est irréductible.

Prop 12 : G est abélien ssi toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1.

2) Morphismes de représentations

Def 13 : Soient V et V' deux représentations de G. Un morphisme de représentation, ou G-morphisme, est une application linéaire $\phi : V \to V'$, tel que, pour $g \in G$ et $v \in V$, $\phi(g_V(v)) = g_{V'}\phi(v)$.
On note $Hom_G(V, V')$ l'ensemble des G morphismes de V dans V' et on dit que ϕ est un G-isomorphisme s'il est bijectif.

Prop 14 : Deux représentations isomorphes ont même dimension.

Lemme 15 (Schur) : Soient V et V' deux représentations irréductibles de G et $\phi \in Hom_G(V, V')$.
- Si $V \not\cong V'$, alors $\phi = 0$.
- Si $V \cong V'$, alors ϕ est une homothétie.

Lemme 16 : On pose $M = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} g$ l'opérateur de moyenne.
- Pour tout $g \in G$, $gM = M = Mg$
- $M^2 = M$. En particulier, M est un projecteur.

Th 17 : Soient V une représentation de G de dimension finie et W un sev de V G-stable. Il existe W' un supplémentaire de W dans V G-stable.

Th 18 (Maschke) : Soit V une représentation de G de dimension finie. Alors V est somme directe de représentations irréductibles.

Rem 19 : Cette décomposition n'est en général pas unique.

Ex 20 : La représentation V^{triv}, avec $\dim(V) > 1$, admet une infinité de décompositions.

Ex 21 : La représentation de S_3 donnée par le triangle équilatéral est $\mathbb{C}^3 = H \oplus D$, avec $H = \{x+y+z=0\}$ et $D = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

II) Caractères

1) Caractères et algèbre $\mathbb{C}[G]$

Déf 22 : Soit V une représentation de G. Le caractère de V est $\chi_V : G \to \mathbb{C}$, $g \mapsto \mathrm{Tr}(g_V)$. Un caractère est irréductible si V l'est.

Ex 23 : Si V est la représentation régulière de G, alors pour tout $g \in G$, $\chi_V(g) = \begin{cases} |G| & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Prop 24 : - $\chi(1) = \dim(V)$

- $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$
- $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$. En particulier, les caractères sont constants sur les classes de conjugaison.

Prop 25 : Soient V et V' deux représentations de G.

- Si V et V' sont isomorphes, $\chi_V = \chi_{V'}$
- Le caractère de $V \oplus V'$ est $\chi_V + \chi_{V'}$
- Le caractère de $\mathrm{Hom}_G(V, V')$ est $\overline{\chi_V}\chi_{V'}$

Déf 26 : On note $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, notées $\phi = \sum_{g \in G} \phi(g)\delta_g$, munie du produit de convolution défini pour tout $(\phi, \psi) \in \mathbb{C}[G]^2$ et tout $h \in G$ par

$$\phi * \psi(h) = \sum_{g \in G} \phi(g)\psi(g^{-1}h)$$

$\phi \in \mathbb{C}[G]$ est centrale si pour tout $(g,h) \in G^2$, $\phi(gh) = \phi(hg)$.
On note Z l'ensemble des fonctions centrales.

Ex 27 : Les caractères sont des fonctions centrales.

Prop 28 : Les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison.

Prop 29 : $(Z, +, \cdot, *)$ est une algèbre. De plus, $Z = \mathbb{C}[G]$ ssi G est abélien.

Déf 30 : On munit l'algèbre $(\mathbb{C}[G], *)$ du produit hermitien $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)\overline{\psi(g)}$.

Ex 31 : Pour $g \in G$, on note $C(g)$ l'ensemble des éléments dans la classe de conjugaison de g. On a alors

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in \mathrm{Conj}(G)} |C(g)| \, |\chi_V(g)|^2$$

Th 32 : Les caractères irréductibles forment une base orthonormale de Z.

Cor 33 (Décomposition canonique) : Soit V une représentation de G et $V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$ sa décomposition en représentations irréductibles. Pour tout $W \in \mathrm{Irr}(G)$, le nombre de W_i isomorphes à W est $n_W = \langle \chi_W, \chi_V \rangle$. En particulier, on a $V \simeq \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}(G)} W^{\langle \chi_W, \chi_V \rangle}$

Cor 34 : Soit V une représentation de G. Alors $\langle \chi_V, \chi_V \rangle$ est un entier et V est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Cor 35 : Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont le même caractère.

Ex 36 : Pour S_3, V^{triv} et V^H ne sont pas isomorphes. En revanche, la sous représentation induite par permutation des coordonnées sur $\mathrm{Vect}(1,1,1)$ est isomorphe à V^{triv}.

2) Tables de caractères

Prop-Déf 37 : On a $|\mathrm{Conj}(G)| = |\mathrm{Irr}(G)|$.

Déf 38 : La table de caractères de G est le tableau de taille $c \times c$, avec $c = |\mathrm{Conj}(G)|$, dont les coefficients sont les valeurs des caractères irréductibles sur les classes de conjugaison : le coefficient en ligne χ et en colonne C est $\chi(C)$

Ex 39 : Table de S_3 (Annexe 1)

Prop 40 (Formule de Burnside) : $|G| = \sum_{V \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(V)^2$.

Prop 41 : - Les colonnes d'une table de caractère forment une famille orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbb{C}^l$.
- Les lignes d'une table de caractères forment une famille orthonormale pour le produit scalaire de $\mathbb{C}[G]$.

Th 42 : La table de caractère de S_4 est — Dev 1

	Id	(1,2)	(1,2,3)	(1,2,3,4)	(1,2)(3,4)
χ^{triv}	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_H	3	1	0	-1	-1
$\varepsilon\chi_H$	3	-1	0	1	-1
	2	0	-1	0	2

III) Cas abélien

On suppose G abélien fini

Def 43 : Le dual de G est $\hat{G}$ l'ensemble des morphismes de G dans $\mathbb{C}$

Prop 44 : $(\hat{G}, \times)$ est un groupe et $\hat{G} = \mathrm{Irr}(G)$.

Lemme 45 : Soient $(g,h) \in G^2$. On a $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi(g)}\chi(h) = \begin{cases} 1 \text{ si } g=h \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Prop 46 : L'application $\iota : G \to \hat{\hat{G}}$, $g \mapsto (\chi \mapsto \chi(g))$ est un isomorphisme de groupes.

Def 47 : L'exposant de G, noté $\exp(G)$ est le plus grand des ordres des éléments de G.

Lemme 48 : G et $\hat{G}$ ont le même exposant.

Th 49 (Théorème de structure des groupes abéliens finis) : Il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $(N_1, \dots, N_r) \in \mathbb{N}^r$, tel que N_1 est l'exposant de G, $N_{i+1} | N_i$ et $G \simeq \mathbb{Z}/N_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/N_r\mathbb{Z}$ — Dev 2

Ex 50 : les seuls groupes abéliens d'ordre 60 sont, à isomorphismes près, $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$.

Références :

Pierre Colmez, Éléments d'analyse et d'algèbre
Jean-Pierre Serre, Représentations linéaires des groupes finis
Phillipe Caldero, Jérôme Germoni, NH2G2 Tome 2.