149. Représentations de groupes finis de petit cardinal

Soit G un groupe fini.

I. Théorie générale

1) Premières définitions

[Pey] p194 **Déf 1**: Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dim finie n. Une représentation linéaire de G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$

Rem 2: Ceci correspond à la donnée d'une action de G sur V en notant $\forall (g,v) \in G\times V$, $g.v = \rho(g)(v)$

Déf 3: le degré d'une représentation est la dimension du $\mathbb{C}$-ev V.

2) Exemples fondamentaux

[Ser] p16 **Ex 4**: Une représentation de degré 1 est un morphisme $\rho : G \to \mathbb{C}^*$. Comme tout élément de G est d'ordre fini, les valeurs $\rho(g)$ sont des racines de l'unité.

Ex 5: Soit N l'ordre de G et V un ev de dim N, ayant une base $(e_g)_{g\in G}$. Si $h \in G$, $\rho_h : V \to V,\ e_g \mapsto e_{hg}$, alors $\rho : G \to GL(V),\ h \mapsto \rho_h$ est une représentation linéaire, appelée représentation régulière, de degré N.

[Pey] p196 **Ex 6**: Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit une représentation somme $\rho_{V\oplus W}$ sur $V \oplus W$ par $\forall g \in G$, $\forall (v,w) \in V\times W$,

$$\rho_{V\oplus W}(g) = \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$$

Ex 7: Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit une représentation des morphismes $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ sur $\mathcal{L}(V,W)$ par $\forall g \in G$, $\forall f \in \mathcal{L}(V,W)$,

$$\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) = \rho_W(g)\circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

[Ser] p17 **Ex 8**: Si G opère sur un ensemble fini X, et V est un ev ayant une base $(e_x)_{x\in X}$. Si $h \in G$ et $\rho_h : V \to V,\ e_x \mapsto e_{h.x}$ alors $\rho : G \to GL(V),\ h \mapsto \rho_h$ est la représentation de permutation associée à X.

3) Représentations irréductibles

Déf 9. Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G resp. sur V et V' sont dites isomorphes s'il existe un isomorphisme d'ev $\tau : V \to V'$ tel que $\forall g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$, ce qui permet d'identifier les deux représentations. [Pey] p198

Déf 10: Si une représentation ρ de G sur V admet un sev $W \subset V$ stable par tous les $\rho(g) \in GL(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.

Déf 11: Une représentation sur V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.

Thm 12: Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

Lem 13 (de Schur): Soient $\rho_V : G \to GL(V)$ et $\rho_W : G \to GL(W)$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f \in \mathrm{Hom}_G(V,W)$ (ie $f \in \mathcal{L}(V,W)$ tel que $\forall g \in G$, $\rho_W(g)\circ f = f \circ \rho_V(g)$). Alors : [Pey] p204

(i) Si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes, $f = 0$

(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme, les représentations sont isomorphes, et si on suppose $V = W$, $\rho_V = \rho_W$, alors f est une homothétie.

Cor 14: Soient $\rho_V : G \to GL(V)$ et $\rho_W : G \to GL(W)$ deux représentations irréductibles de G. Soit $f \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ et $M(f) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g.f$. Alors : [Col] p127

(i) si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes, $M(f) = 0$

(ii) si $V = W$ alors $M(f)$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V}\mathrm{Tr}(f)$

(iii) Si Φ est une fonction centrale sur G ie $\forall g,h \in G$, $\Phi(hgh^{-1}) = \Phi(g)$, alors $\sum_{g\in G}\Phi(g)\rho_V(g)$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\dim V}\sum_{g\in G}\Phi(g)\,\mathrm{Tr}(\rho_V(g))$.

149 - Représentations de groupes finis de petit cardinal

129

4) Théorie des caractères

[Pey] p.207 **Def 15**: Soit ρ une représentation de G sur un $\mathbb{C}$-ev V de dim n. On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\forall g \in G$, $\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$.

Ex 16: La représentation triviale est la représentation de dim 1 correspondant au caractère trivial $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ défini par $\chi(g) = 1$ $\forall g \in G$.

Rem 17: La connaissance du caractère est équivalente à la connaissance de toutes les vp de tous les morphismes associés aux éléments de G.

Prop 18: (i) $\chi_\rho(1) = n$

(ii) $\forall g, h \in G^2$, $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ et $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$

(iii) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ (iv) $\chi_{\mathcal{L}(V,W)} = \chi_V \chi_W$

Prop 19: Deux représentations isomorphes ont même caractères.

App 20: • Tout caractère de σ_n est réel.
• Le caractère de la rep. de permutation donne les pts fixes de l'action de G sur V.

[Col] p128 **Def 21**: On note $R_c(G)$ l'ensemble des fonctions centrales. On munit $R_c(G)$ du produit scalaire hermitien $\langle , \rangle$ défini par : $\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$.

Thm 22 (Frobenius): les caractères irréductibles forment une base orthonormale de $R_c(G)$.

Cor 23. Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre $|\mathrm{Conj}(G)|$ de classes de conjugaison de G. En particulier, il est fini.

Cor 24: Si V est une représentation de G, si $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ est une décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles et si $W \in \mathrm{Irr}(G)$, alors le nombre m_W de W_i qui sont isomorphes à W est égal à $\langle \chi_W, \chi_V \rangle$. En particulier, il ne dépend pas de la décomposition et $V \cong \bigoplus_{W \in \mathrm{Irr}(G)} \langle \chi_W, \chi_V \rangle W$

Cor 25: Une représentation V de G est irréductible ssi $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Cor 26. (i) Si W est irréductible, alors W apparaît dans la représentation régulière avec la multiplicité $\dim W$.

(ii) On a $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W)^2 = |G|$ (Formule de Burnside)

(iii) Si $g \neq 1$ alors $\sum_{W \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim W) \chi_W(g) = 0$

Def 27: Comme les caractères sont constants sur les classes de conjugaison de G, il suffit de dresser un tableau des valeurs des caractères $(\chi_i)_{i=1}^{p}$ sur ces classes. On considère les quantités $\chi_i(g_j)$ où g_j est un représentant de la classe de conjugaison de G. Par commodité, on indique aussi les cardinaux k_j des différentes classes. On établit ainsi la table de caractères de G : [Pey] p225

	1 1	k_2 g_2	$\dots$	k_p g_p
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(g_2)$	$\dots$	$\chi_1(g_p)$
$\vdots$				
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(g_2)$	$\dots$	$\chi_p(g_p)$

On a de plus des relations d'orthogonalité sur les lignes et les colonnes de la table.

II. Représentation de groupes classiques

1) Les groupes abéliens

[Col] p131 **Thm 28**: Si G est commutatif, toute représentation irréductible de G est de dim 1.

Cor 29. Si G est commutatif, toute fonction de G dans $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de caractères.

Thm 30: Si G est commutatif, il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $N_1, \dots, N_r$ où N_1 est l'exposant de G et $N_{i+1} | N_i$, $i \leq r-1$, tels que $G \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$.

Ex 31: Table de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

	1	-1
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

[Pey] p 226

2) Les groupes cycliques

Thm 32 : Soit $G = \{1, g_0, g_0^2, \dots, g_0^{n-1}\}$. Soit $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Les caractères de G sont de la forme $\chi_j : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, $g_0^k \mapsto (\omega_n^j)^k$ pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$.

D'où la table de caractères :

	1	g_0	$\dots$	g_0^{n-1}
	1	1	$\dots$	1
χ_1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	ω_n	$\dots$	ω_n^{n-1}
$\vdots$				
χ_n	1	ω_n^{n-1}	$\dots$	$\omega_n^{(n-1)(n-1)}$

3) Groupes diédraux

DVPT 1

Thm 33 : La table de caractères de D_n est :

* si n est pair :

	r^k	sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$
χ_h	$2\cos\left(\frac{2\pi h k}{n}\right)$	0

$h \in \{1, \dots, \frac{n}{2} - 1\}$

* si n est impair :

	r^k	sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_h	$2\cos\left(\frac{2\pi h k}{n}\right)$	0

$h \in \{1, \dots, \frac{n-1}{2}\}$

III – Cas des groupes de petit cardinal

[Col] p 135

1) Le groupe alterné A_4

Thm 34 : On pose $t = (123)$. Les 4 classes de conjugaison de A_4 sont $\{Id\}$, $\{$Doubles transpositions notées $x, y, z\}$, $\{t, tx, ty, tz\}$, $\{t^2x, t^2y, t^2z, t^2\}$.

D'où la table de caractères en posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$:

	C_1	C_2	C_3	C_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

2) Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$

[Pey] p 228

DVPT 2

Thm 35 : La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :

	Id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_S	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2

3) Le groupe quaternionique

[Pey] p 238

Thm 36 : $H_8 = \{1, -1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. Sa table de caractères est :

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

avec $\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \\ ij = -ji = k \end{cases}$

4) Le groupe de Heisenberg

Thm 37 : soit $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,b,c) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \right\}$

La table de caractères de G est :

	Id	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a,b) \neq (0,0)$
$\chi_{\omega,\omega'}$, $\omega \in \{1, j, j^2\}$, $\omega' \in \{1, j, j^2\}$	1	1	1	$\omega^a \omega'^b$
χ_1	3	$\frac{-3 - \sqrt{-27}}{2}$	$\frac{-3 + \sqrt{-27}}{2}$	0
χ_2	3	$\frac{-3 + \sqrt{-27}}{2}$	$\frac{-3 - \sqrt{-27}}{2}$	0

Références

[Col] : Colmez, Eléments d'analyse et d'algèbre
[Pey] . Peyré, L'algèbre discrète de la transformation de Fourier
[Ser] : Serre, Représentations linéaires des groupes finis.

Autres développements possibles :

* Théorème de Molien
* Théorème de Frobenius et lemmes préliminaires.
* Table de caractères de A_5.