LEÇON 109 : REPRÉSENTATIONS DE GROUPES FINIS DE PETIT CARDINAL

I COMMENT TROUVER LES REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET LEURS CARACTÈRES

Petits rappels 1 : •1) représentation d'un groupe G : morphisme $\rho : G \to GL(V)$ où V ev. Son degré est la dimension de V. Elle est irréductible si aucun sev de V autre que $\{0\}$ et V n'est stable sous ρ.

•2) $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ et $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ isomorphes signifie : $\exists\, f \in GL(V_1, V_2), \forall g \in G, f \circ \rho_1 = \rho_2 \circ f$

•3) caractère d'une représentation ρ : c'est l'application
$$\chi : G \to \mathbb{C}, \quad g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

•4) (représentations isomorphes) $\Leftrightarrow$ (caractères égaux)

•5) les caractères sont constants sur les classes de conjugaison

•6) à isomorphisme près, il existe autant de représentations irréductibles d'un groupe que de classes de conjugaison de ce groupe. En notant d_i leurs degrés on a : $\sum d_i^2 = |G|$

•7) orthogonalité des caractères :

▷ les lignes du tableau de caractère sont orthogonales pour le produit scalaire :
$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \cdot \chi_2(g)$$

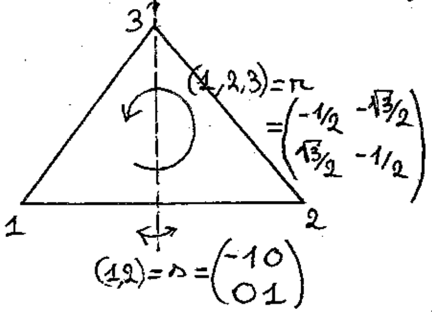
▷ les colonnes sont orthogonales pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^s$ où s est le nombre de classes de conjugaison de G.

•8) si χ est un caractère irréductible, $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ et réciproquement

•9) si χ et χ' sont deux caractères non isomorphes, $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$ et réciproquement

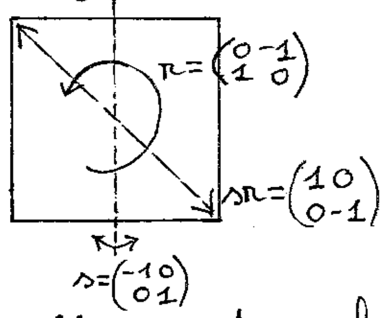
1) Emploi de la géométrie.

•1) Le groupe S_3 ($\simeq D_3$) : on peut le voir comme le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ qui stabilise un triangle équilatéral. Cela fournit une représentation de S_3 de degré 2 ainsi que son caractère (voir figure ci-dessous). La représentation triviale et la signature complètent sa table :



S_3	1	$\overset{3}{(1,2)}$	$\overset{2}{(1,2,3)}$
D_3	1	$\overset{3}{s}$	$\overset{2}{r}$
Id	1	1	1
χ_1	1	−1	1
⟹ χ_2	2	0	−1

•2) Le groupe D_4 : vu comme le sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ qui stabilise un carré, il donne une représentation de degré 2 de D_4 :



D_4	1	-1	$\overset{2}{r}$	$\overset{2}{s}$	$\overset{2}{sr}$
⟹ χ_2	2	−2	0	0	0

•3) Le groupe A_4 : on le voit comme le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent un tétraèdre régulier. D'où une représentation de degré 3. Voir figure 1.

•4) Le groupe S_4 : deux représentations de degré 3 :
▷ les isométries qui fixent un tétraèdre régulier
▷ les déplacements qui fixent un cube (figure 2)

•5) Le groupe A_5 : vu comme les déplacements qui fixent un dodécaèdre régulier → représentation de degré 3.

Remarque : Ces représentations trouvées géométriquement sont irréductibles

② Utilisation du quotient :

Voici d'abord deux tables utiles : celle de $K_4 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et celle de C_n, le groupe cyclique d'ordre n, $\omega = e^{2i\pi/n}$

K_4	$(0,0)$	$(1,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$
Id	1	1	1	1
χ_1	1	-1	-1	1
χ_2	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1

C_n	1	a	a^2	...	a^{n-1}
Id	1	1	1	...	1
χ_1	1	ω	ω^2	...	ω^{n-1}
χ_2	1	ω^2	ω^4	...	$\omega^{2(n-1)}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
χ_{n-1}	1	ω^{n-1}	$\omega^{2(n-1)}$	...	$\omega^{(n-1)^2}$

Proposition 2 : Soit $H \triangleleft G$ et $\pi : G \to G/H$ la projection canonique. Alors toute représentation ρ de G/H donne une représentation $\rho \circ \pi$ de G qui a les même sous-représentations que ρ

Proposition 3 : Notons G' le groupe dérivé de G. Alors le nombre de représentations de dimension 1 de G est $|G|/|G'|$

Applications 4 : •1) $A_4' = K_4$ et $A_4/A_4' \simeq C_3$. On en déduit la table complète de A_4 (figure 1)

•2) $D_4' \simeq \{\pm 1\}$ et $D_4/D_4' \simeq K_4$. On en déduit la table de D_4 (figure 3)

•3) soit H_8 le groupe des quaternions. $H_8' = \{\pm 1\}$ et $H_8/H_8' \simeq K_4$. Sa table est sur la figure 3

•4) $K_4 \triangleleft S_4$ et $S_4/K_4 \simeq S_3$. Table en figure 3.

Remarque 5 : Les tables de D_4 et H_8 sont identiques. Pourtant $H_8 \not\simeq D_4$.

③ Représentation de permutation :

Définition 6 : Soit G agissant sur un ensemble fini X. Soit $V := \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C} e_x$ le $\mathbb{C}$-ev de base $\{e_x\}_{x \in X}$. On définit alors une représentation de permutation $\rho : G \to GL(V)$ par : $\forall g \in G, x \in X, \rho(g)(e_x) = e_{g.x}$

Exemples 7 : •1) S_4 agit sur les quatre sommets du tétraèdre régulier d'où une représentation de dimension 4

•2) A_5 agit sur les six axes traversant deux faces opposées d'un dodécaèdre, d'où une représentation de degré 6.

Applications 8 : •1) un autre moyen d'obtenir la table de S_4 ($\boxed{\text{DEVELOPPEMENT 1}}$)

•2) la table de A_5 : voir figure 4

$\boxed{\text{II}}$ TROIS APPLICATIONS

① Détermination des sous-groupes normaux :

Théorème 9 : (Maschke) : Toute représentation est somme directe de représentations irréductibles

Théorème 10 : On pose $K_\chi := \{g \in G / \chi(g) = \chi(1)\}$ où χ est un caractère de G. On a alors les deux points suivants :

$\boxed{\text{DEVELOPPEMENT 2}}$

$\cdot 1)$ $K_\chi \triangleleft G$

$\cdot 2)$ si $\chi_1, \dots, \chi_m$ sont les caractères irréductibles de G, alors les sous-groupes normaux de G sont exactement les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset \{1, \dots, m\}$, $I \neq \emptyset$

Applications 11: On utilise les tables de caractères et le résultat précédent pour déterminer tous les sous-groupes normaux non triviaux des groupes étudiés jusqu'à présent :

- $\cdot 1)$ K_4 : $\langle(1,0)\rangle ; \langle(0,1)\rangle ; \langle(1,1)\rangle$
- $\cdot 2)$ C_m : les $\langle a^k \rangle$ où k divise m
- $\cdot 3)$ S_3 : $\langle 3\text{-cycles} \rangle = A_3$
- $\cdot 4)$ D_4 : $\langle -1 \rangle ; \langle -1, r \rangle ; \langle -1, s \rangle ; \langle -1, sr \rangle$
- $\cdot 5)$ A_4 : $\langle$ produits de transpositions à supports disjoints $\rangle$
- $\cdot 6)$ S_4 : A_4, $\langle \qquad \rangle$
- $\cdot 7)$ H_8 : $\langle -1 \rangle, \langle -1, I \rangle, \langle -1, J \rangle, \langle -1, K \rangle$
- $\cdot 8)$ A_5 : il est simple !

2) Résolubilité :

Définition 12: Un groupe est dit résoluble si il existe une suite finie de groupes H_i, $i=0, \dots, t$ telle que : $\cdot$ $H_0 = \{1\}$, $H_t = G$

$\cdot$ $H_i \triangleleft H_{i+1}$ pour $i = 0, \dots, t-1$

$\cdot$ H_{i+1}/H_i est abélien pour $i = 0, \dots, t-1$

Théorème 13: Soit d le degré d'une représentation irréductible de G. Alors d divise $|G|$.

Théorème 14: (Burnside). Soient p et q deux nombres premiers distincts et α et β deux entiers positifs ou nuls. Tout groupe d'ordre $p^\alpha q^\beta$ est résoluble.

Application 15: Les groupes K_4, S_3, A_4, S_4, D_4 et H_8 sont résolubles

3) Classes de conjugaison :

Théorème 16: Un groupe G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de dimension 1

On retrouve les deux résultats suivants :

$\cdot 1)$ si $|G| = p^2$, premier, alors G est abélien

$\cdot 2)$ si p et q sont premiers, $p < q$, $q \not\equiv 1 [p]$, alors si $|G| = pq$, G est abélien.

Théorème 17: (Burnside) : Si $|G|$ est impair, en notant s le nombre de classes de conjugaison de G on a :

$$s \equiv |G| \, [16]$$

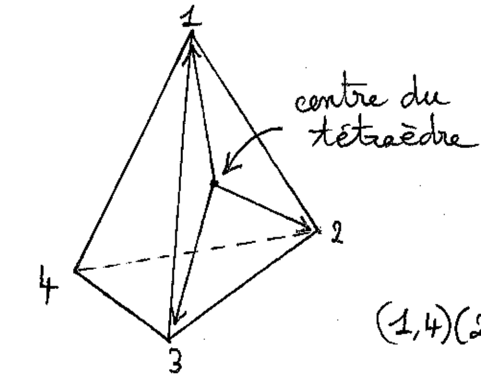
Application 18: Tout groupe d'ordre 15, 33 ou 65 est abélien.

Développements : $\cdot 1)$ table de S_4 avec les représentations de permutations

$\cdot 2)$ le théorème 10 et un exemple

Références :
- [Rauch], "Les groupes finis et leurs représentations". La quasi-totalité de la théorie est faite dedans, ainsi que les histoires géométriques
- [Simon], "Representations of finite and Compact Groups". La partie $\boxed{\text{II}}$ 3 est faite dedans à la page 55. On trouve aussi ($\sim$ p 15) des explications sur les correspondances géométriques utilisées au $\boxed{\text{I}}$ 1.
- [Artin], "Algebra". A_5 y est bien détaillé (et le lien avec le dodécaèdre)
- [Peyré], "L'algèbre discrète de la transformée de Fourier"
- [Serre], "Représentations linéaires des groupes finis"

FIGURE 1



$$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$$

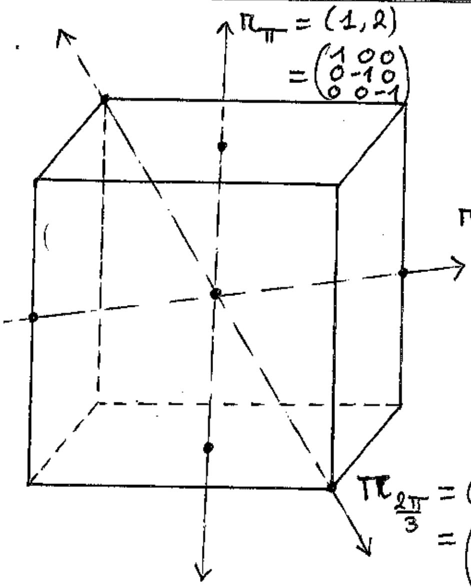
$$(1,3,2) = \begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0 \end{pmatrix}$$

$$(1,4)(2,3) = \begin{pmatrix} -1&0&0\\ -1&0&1\\ -1&1&0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

A_4	1	$\overset{3}{(1,4)(2,3)}$	$\overset{4}{(1,2,3)}$	$\overset{4}{(1,3,2)}$
Id	1	1	1	1
χ_j	1	1	j	j^2
χ_j'	1	1	j^2	j
χ_3	3	-1	0	0

où $j = e^{2i\pi/3}$

FIGURE 2



$$r_\pi = (1,2) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$$

$$r_\pi = (1,2)(3,4) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$$

$$r_{\frac{2\pi}{3}} = (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&-1 \end{pmatrix}$$

$$r_{\frac{\pi}{2}} = (1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$$

S_4	1	$\overset{6}{(1,2)}$	$\overset{8}{(1,2,3)}$	$\overset{6}{(1,2,3,4)}$	$\overset{3}{(1,2)(3,4)}$
Id	1	1	1	1	1
sg	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	-1	0	1	-1
χ_3'	3	1	0	-1	-1

FIGURE 3

Table de D_4 et H_8 :

D_4	1	-1	$\overset{2}{r}$	$\overset{2}{s}$	$\overset{2}{sr}$
H_8	1	-1	$\overset{2}{I}$	$\overset{2}{J}$	$\overset{2}{K}$
Id	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	-1	-1	1
χ_1'	1	1	-1	1	-1
χ_1''	1	1	1	-1	-1
χ_2	2	-2	0	0	0

FIGURE 4

Table de A_5 :

A_5	1	$\overset{15}{(1,2)(3,4)}$	$\overset{20}{(1,2,3)}$	$\overset{12}{(1,2,3,4,5)}$	$\overset{12}{(2,1,3,4,5)}$
Id	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$(1+\sqrt{5})/2$	$(1-\sqrt{5})/2$
χ_3'	3	-1	0	$(1-\sqrt{5})/2$	$(1+\sqrt{5})/2$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	1	-1	0	0