109 Représentations de groupes finis de petit cardinal

Soit G un groupe fini

I) Théorie générale

1) Définitions et premières propriétés [COL][PEY]

Def 1: Soit V un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie n. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to GL(V)$

Ex 2: Représentation régulière :
G agit sur G par translation à gauche. La représentation régulière de G est $\rho : G \to GL(V)$, $g \mapsto (e_h \mapsto e_{gh})$ où $V = \text{vect}(e_g, g \in G)$

Ex 3: Représentation de permutation
Si G opère sur un ensemble fini X et V est un ev ayant une base $(e_x)_{x\in X}$. Si $h \in G$ et $\rho_h : V \to V$, $e_x \mapsto e_{hx}$, alors $\rho : G \to GL(V)$, $h \mapsto \rho_h$ est la représentation de permutation associée à X

Def 4: Le degré d'une représentation est la dimension de V

Ex 5: Une représentation de degré 1 est un morphisme $\rho : G \to \mathbb{C}^*$

2) Représentations irréductibles [COL]

Def 6: ~~Si~~ une représentation $\rho : G \to V$ admet un sev $W \subset V$ stable ~~par~~ tous les $\rho(s) \in GL(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous représentation

Ex 7: Si $v \in V - \{0\}$, le sev de V engendré par les $g.v$, pour $g \in G$ est une sous représentation de V.

Def 9: Une représentation sur V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous représentations $\{0\}$ et V tout entier

Ex 10 : La représentation de S_3 sur $\mathbb{C}^2$ est irréductible

Thm 11: Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles

3) Caractère [COL][PEY]

Def 12: Soit ρ une représentation d'un groupe G sur V un $\mathbb{C}$-ev de dimension n. On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(s) = tr(\rho(s))$ $s \in G$

Ex 13: La représentation triviale est la représentation de dimension 1 correspondant au caractère trivial $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ défini par $\chi(g) = 1$ $\forall g \in G$.

Def 14: On note $R_C(G)$ l'ensemble des fonctions centrales

Thm 15 (Frobenius) Les caractères irréductibles forment une base orthogonale de $R_C(G)$

Cor 16. Le nombre de représentations irréductibles de G est égal au nombre $|\text{Conj}(G)|$ de classes de conjugaison de G

Def 17: Comme les caractères sont constants sur les classes de conjugaison de G, il suffit de dresser un tableau des valeurs des caractères $(\chi_i)_{i=1}^{p}$ sur ces classes. On établit la table de caractère de G en indiquant les quantités $\chi_i(g_j)$ où les g_j sont les représentants des classes de conjugaison de G. k_j indique le cardinal de la classe de g_j

	1 1	k_2 g_2	...	k_p g_p
χ_1	$\chi_1(1)$	$\chi_1(g_2)$	...	$\chi_1(g_p)$
⋮				
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(g_2)$	...	$\chi_p(g_p)$

II) Étude de groupes généraux

1) Groupes cycliques [p] [PEY]

Thm 18 : Soit $G = \{1, \rho, \dots, \rho^{n-1}\}$. Soit $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Les caractères de G sont de la forme $\chi_j : G \to \mathbb{C}^*$
$\rho^k \mapsto \omega_n^{k(j-1)}$
D'où la table de caractère

	1 1	1 ρ	$\dots$	1 ρ^{n-1}
χ_1	1	1	$\dots$	1
χ_2	1	ω_n	$\dots$	ω_n^{n-1}
$\vdots$				
χ_n	1	ω_n^{n-1}	$\dots$	$\omega_n^{(n-1)^2}$

2) Groupes distingués [ULM]

Def 19 : Soient G un groupe et χ_ρ un caractère de G.
On appelle noyau du caractère χ_ρ et on note $\ker(\chi_\rho)$ l'ensemble $\{g \mid g \in G,\ \chi(g) = \chi(e)\}$ des éléments de G qui ont même image par χ que l'élément neutre e de G

Prop 20 : Soient G un groupe fini ayant m classes de conjugaison et $\chi_1, \dots, \chi_m$ les caractères irréductibles de G. Tout sous groupe distingué H dans G est de la forme $H = \bigcap_{j \in J} \ker(\chi_j)$ avec $J \subset \{1, \dots, m\}$

Application 21 : Sous groupes distingués de D_6

D_6	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_6	2	-1	-1	2	0	0

$\boxed{\text{Prop 20 + App 21 DVPLT 1}}$

3) Groupes abéliens [COL]

Thm 22 : Si G commutatif, toute représentation irréductible de G est de dimension 1.

Cor 23 : Si G commutatif, toute fonction de G dans $\mathbb{C}$ est combinaison linéaire de caractères.

Thm 24 : Si G commutatif, il existe $r \in \mathbb{N}$ et des entiers $N_1, \dots, N_r$ où N_1 est l'exposant de G et $N_{i+1} \mid N_i$, $i \leq r-1$, tels que

$$G \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z}$$

Ex 25 : Table de caractères de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

	1	-1
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

III) Cas des groupes de petits cardinal et interprétation géométrique

1) Groupes symétriques / alternés [COL][PEY]

Prop 26 : La table de S_3 est :

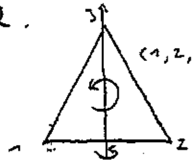
	K_1	K_2	K_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	-1	0	2

où $V_1 \simeq \mathbb{C}$ et $\rho_{V_1} : S_3 \to GL(\mathbb{C})$
$g \mapsto (z \mapsto z)$

$V_2 \simeq \mathbb{C}$ et $\rho_{V_2} : S_3 \to GL(\mathbb{C})$
$g \mapsto (z \mapsto \varepsilon(g) z)$ $\qquad \omega = e^{2i\pi/3}$

$V_3 \simeq \mathbb{C}^2$ et $\rho_{V_3} : S_3 \to GL(\mathbb{C}^2)$
$g \in K_1 \mapsto ((a,b) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$
$g \in K_2 \mapsto ((a,b) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$
$g \in K_3 \mapsto ((a,b) \mapsto \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$

Rque 27 : On peut voir le groupe S_3 comme le sous groupe de $O(\mathbb{R}^2)$ qui stabilise un triangle équilatéral.



$K_1 = 1$, $K_2 = (1,2)$, $K_3 = (1,2,3)$

$(1,2,3) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ $\quad (1,2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rque 28 : On a alors $S_3 \simeq D_3$, avec $r = (1,2,3)$ et $s = (1,2)$

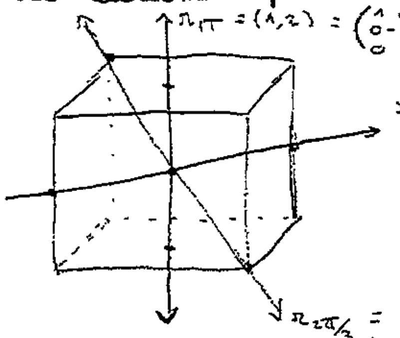
Prop 29 : La table de caractère de S_4 est

	Id	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ε	1	-1	1	-1	1
χ_S	3	1	0	-1	-1
χ_ω	3	-1	0	1	-1
$\chi_{\omega'}$	2	0	-1	0	2

DVPT 2

Rque 30 : • Les isométries qui fixent un tétraèdre régulier donnent une des deux représentations de degré 3.

• Les déplacements qui fixent un cube donnent la deuxième représentation de degré 3.



$r_{1,\pi} = (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$r_\pi = (1,2)(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$r_{2\pi/3} = (1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

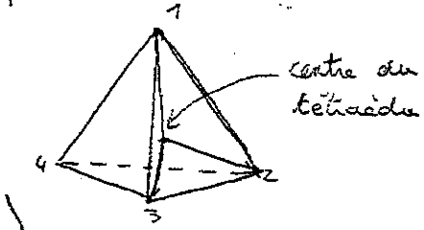
$r_{\pi/2} = (1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Prop 31 : On pose $t = (1,2\,3)$. Les 4 classes de conjugaison de A_4 sont $\{Id\}$, {double transpositions notées x, y, z}, $\{t, tx, ty, tz\}$, $\{t^2x, t^2y, t^2z, t^2\}$.

D'où la table de caractère avec $\omega = e^{2i\pi/3}$

	K_1	K_2	K_3	K_4
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

Rque 32 : On voit le groupe A_4 comme le groupe des déplacements de $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent un tétraèdre régulier.



$(1,2,3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(1,3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(1,4)(2,3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) Le groupe des quaternions [PEY]

Prop 33 : $H_8 = \{1, -1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

Avec $\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ jk = -kj = i \\ ki = -ik = j \end{cases}$ $\quad \{ij = -ji = k$

Sa table de caractère est

	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Références

[COL] : Colmez, Eléments d'analyse et d'algèbre
[PEY] : Peyré, L'algèbre discrète de la transformation de Fourier
[ULM] : Ulmer, Théories des groupes

Leçon 109 : Exemples et représentations de groupe finis de petit cardinal

Grégoire Kooyman et Solène Thépaut

Sous-groupes distingués et caractères. Application à D_6

Références : Représentations linéaires de groupes finis, Serre.
Théorie des groupes, Ulmer.

Soit G un groupe fini, $\rho \to GL(V)$ une représentation de G de degré d et χ son caractère.

On définit le noyau de χ par :

$$\ker(\chi) = \{g \mid g \in G,\ \chi(g) = \chi(e)\}$$

C'est l'ensemble des éléments de G qui ont la même image par χ que e l'élément neutre de G.

Lemme 1. *Pour tout $g \in G$, on a*

- $|\chi(g)| \leq \chi(e)$
- $\chi(g) = \chi(e)$ *si et seulement si* $g \in \ker(\rho)$

Preuve du lemme 1. Soit $g \in G$ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de $\rho(g)$. Ce sont des racines de l'unité donc elles sont toutes de module 1.
On a d'après l'inégalité triangulaire:

$$|\chi(g)| = |\sum_{j=1}^{d} \lambda_j| \leq \sum_{j=1}^{d} |\lambda_j| = d = \chi(e)$$

Comme les λ_j sont tous de modules 1, il y a égalité dans l'inégalité précédente si et seulement si tous les λ_j sont égaux.
En outre $\chi(g) = \chi(e)$ si et seulement si tous les λ_j valent 1, c'est-à-dire si $\rho(g) = I_d$, i.e $g \in \ker \rho$. □

$\ker(\chi) = \ker(\rho)$ donc le noyau du caractère χ est un sous-groupe distingué de G. On peut grâce à la proposition suivante déterminer tous les sous-groupes distingués de G à partir de sa table de caractères.

Proposition 1. *Soit m le nombre de classes de conjugaison de G et $\chi_1, \dots, \chi_m$ les caractères irréductibles de G. Tout sous-groupe distingué H dans G est de la forme $H = \bigcap_{j \in J} \ker(\chi_j)$ avec $J \subset \{1, \dots, m\}$.*

Démonstration. G agit par translation à gauche sur G/H.
On note $\phi : G \to \mathfrak{S}_{[G:H]}$ le morphisme définissant cette action. Soit χ le caractère de la représentation de permutation $\rho_\phi : G \to V$ associée à ϕ. On a alors

$$\ker(\chi) = \ker(\phi) = H$$

H est donc le noyau d'un caractère de G. Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréudctibles : on décompose donc V en représentations irréductibles $V = \bigoplus_{i=1}^{s} a_i V_i$. En notant χ_i le caractère irréductible de la représentation irréductible V_i on obtient :

$$\chi = \sum_{i=1}^{s} a_i \chi_i$$

De plus
$g \in \ker(\chi)$ si et seulement si g agit trivialement sur V
si et seulement si g agit trivialement sur chacun des V_i
si et seulement si $g \in \ker(\chi_i)$ pour tout i d'après le lemme.

Donc $H = \cap_{i=1}^{s} \ker(\chi_i)$, ce qui achève cette démonstration. □

Application 1 (Sous-groupes distingués de D_6). *Il s'agit du groupe d'ordre 12 des rotations et des symétries du plan qui conservent un hexagone régulier. En utilisant la proposition précédente on peut déterminer tous les sous-groupes distingués du groupe D_6 à partir de sa table de caractères.*

On cherche donc à construire la table de caractères de D_6. Soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et s une symétrie de D_6. Tout élément de D_6 est alors de la forme r^k ou sr^k avec $k \in \{0, \dots, 5\}$. La relation $srs = r^{-1}$ permet de déterminer les différentes classes de conjugaison de D_6 : il s'agit de $\{id\}$, $\{r, r^5\}$, $\{r^2, r^4\}$, $\{r^3\}$, $\{s, sr^2, sr^4\}$ et $\{sr, sr^3, sr^5\}$.
D_6 possède 6 classes de conjugaisons donc 6 caractères irréductibles.

On obtient d'abord 4 représentations irréductibles de degré en faisant correspondre à r et s ± 1.

Posons maintenant $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et soit :

$$\begin{array}{rccc} \rho_1 & : & D_6 & \to & GL_2(\mathbb{C}) \\ & & r^k & \mapsto & \begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix} \\ \\ & & sr^k & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-k} \\ \omega^k & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \rho_2 & : & D_6 & \to & GL_2(\mathbb{C}) \\ & & r^k & \mapsto & \begin{pmatrix} \omega^{2k} & 0 \\ 0 & \omega^{-2k} \end{pmatrix} \\ \\ & & sr^k & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & \omega^{-2k} \\ \omega^{2k} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie par le calcul que ρ_1 et ρ_2 sont bien des représentations de D_6. De plus les seules droites de $\mathbb{C}^2$ stables par $\rho_i(r)$ sont $(1,0)\mathbb{C}$ et $(0,1)\mathbb{C}$ qui ne sont pas stables par $\rho_i(s)$. Ces deux représentations sont donc irréductibles. On a trouvé les 6 caractères irréductibles, d'où la table de caractères de D_6 :

D_6	$\{id\}$	$\{r, r^5\}$	$\{r^2, r^4\}$	$\{r^3\}$	$\{s, sr^2, sr^4\}$	$\{sr, sr^3, sr^5\}$
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	-1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	-1	1
χ_5	2	1	-1	-2	0	0
χ_6	2	-1	-1	2	0	0

Finalement on trouve tous les sous-groupes distingués de D_6 :

- $\ker(\chi_1) = D_6$ le groupe lui-même
- $\ker(\chi_2) =< r >$ le sous-groupe cyclique des rotations
- $\ker(\chi_3) = \{id, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$
- $\ker(\chi_4) = \{id, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$
- $\ker(\chi_5) = \{id\}$
- $\ker(\chi_6) = \{id, r^3\}$

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Référence : L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Peyré

Prouvons le résultat suivant :

Proposition. *La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :*

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

Démonstration. Déterminons d'abord les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_4$.

Deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles se décomposent en le même nombre de cycles de même longueur à supports disjoints.

On obtient donc cinq classes de conjugaison :

- La classe de l'identité
- Les transpositions (6 éléments)
- Les 3-cycles (8 éléments)
- Les 4-cycles (6 éléments)
- Les doubles transpositions (3 éléments)

Il y a autant de caractères irréductibles que de classes de conjugaison. On en cherche donc 5. La représentation triviale et la représentation alternée ϵ de $\mathfrak{S}_4$ sont de degré 1 donc irréductibles, on note χ_1 et χ_ϵ leur caractère.

Considérons maintenant la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_4$:

$$\begin{array}{cccc} \rho_P & : & \mathfrak{S}_4 & \to & GL_4(\mathbb{C}) \\ & & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq 4} \end{array}$$

ρ_P n'est pas irréductible car la droite $D = (1,1,1,1)\mathbb{C}$ et l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{C}^4 | \sum_{i=1}^4 x_i = 0\}$ sont stables par $\mathfrak{S}_4$. Ces deux espaces sont supplémentaires, la sous-représentation de ρ_P sur D est la représentation triviale et si on note χ_s le caractère de la sous-représentation de ρ_P sur H on a :

$$\chi_P = \chi_s + \chi_1$$

Or $\chi_P(\sigma) = \mathrm{Tr}((\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq 4}) = \#\{i \in \{1,2,3,4\} | \sigma(i) = i\}$ donc on connaît les valeurs de χ_s.

On peut ainsi calculer $\langle \chi_s, \chi_s \rangle$:

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{24}(1 \times (4-1)^2 + 6 \times (2-1)^2 + 8 \times (1-1)^2 + 6 \times (-1)^2 + 3 \times (-1)^2)$$

$$\langle \chi_s, \chi_s \rangle = \frac{1}{24}(9 + 6 + 6 + 3) = 1$$

Ce qui prouve que χ_s est un caractère irréductible. Il reste donc deux représentations irréductibles à trouver. On note n_4 et n_5 leur degré. On a la formule suivant reliant les degrés des représentations irréductibles au cardinal de $\mathfrak{S}_4$:

$$1^2 + 1^2 + 3^2 + n_4^2 + n_5^2 = \#\mathfrak{S}_4$$

D'où :

$$n_4^2 + n_5^2 = 13$$

Puis $n_4 = 2$ et $n_5 = 3$. Soit $W = \mathcal{L}(H, V_\epsilon)$. W est une représentation de degré 3 et de caractère $\chi_W = \chi_s\overline{\chi_\epsilon}$. On connaît les valeurs de χ_W et on peut calculer $\langle\chi_W, \chi_W\rangle$: on trouve $\langle\chi_W, \chi_W\rangle = 1$ donc χ_W est un caractère irréductible. En notant χ_W' le dernier caractère irréductible on a la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ jusqu'à présent :

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1
$\chi_{W'}$	2	?	?	?	?
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

On obtient les valeurs de χ_W' par la relation reliant les valeurs des caractères irréductibles :

$$\forall \sigma \neq id \in \mathfrak{S}_4,\ \chi_1(\sigma) + \chi_\epsilon(\sigma) + 2\chi_W'(\sigma) + 3\chi_s(\sigma) + 3\chi_W(\sigma) = 0$$

. D'où la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$:

	id	(12)	(123)	(1234)	$(12)(34)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_ϵ	1	-1	1	-1	1
$\chi_{W'}$	2	0	-1	0	2
χ_s	3	1	0	-1	-1
χ_W	3	-1	0	1	-1

$\square$