109

Représentations de groupes de petit cardinal

G désignera un groupe fini et V un $\mathbb{C}$-ev de dim finie

1. Outils théoriques

1.1. Représentations

déf 1 : Une représentation de G est la donnée d'un couple (ρ, V) où ρ est un morphisme de G dans $GL(V)$. Le degré de la représentation (ρ, V) est l'entier $\dim V$.

déf 2 : Soit (ρ, V) une représentation de G. Un sous-espace W de V est dit G-invariant lorsque $\forall g \in G \; \rho(g)(W) \subset W$.
Une représentation (ρ, V) de G est dite irréductible lorsque ses seuls sous-espaces G-invariants sont $\{0\}$ et V.

déf 3 : Soient (ρ_i, V_i) $i \in \{1,2\}$ deux représentations de G. La somme directe de ρ_1 et ρ_2, notée $\rho_1 \oplus \rho_2$, est la représentation sur $V_1 \oplus V_2$ donnée par
$$\forall g \in G \;\; \forall v_1 \in V_1 \; \forall v_2 \in V_2 \quad \rho_1 \oplus \rho_2(g)(v_1 \oplus v_2) = \rho_1(g)(v_1) \oplus \rho_2(g)(v_2)$$

Th 4 : Toute représentation se décompose en somme de représentations irréductibles

déf 5 : Soient (ρ_i, V_i) $i \in \{1,2\}$ deux représentations de G. On définit $\rho = \mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)$ comme la représentation de G sur $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ donnée par
$$\forall g \in G \quad \forall u \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \quad \rho(g)(u) = \rho_2(g) \circ u \circ \rho_1(g)^{-1}$$

déf 6 : Deux représentations (ρ_i, V_i) $i \in \{1,2\}$ de G sont dites équivalentes, et on note $\rho_1 \simeq \rho_2$, lorsqu'il existe une bijection $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2) \setminus \{0\}$ tel que $\forall g \in G \;\; \rho_2(g) \circ f = f \circ \rho_1(g)$

1.2. Caractères

déf 7 : Soit (ρ, V) une représentation de G. On appelle caractère de (ρ, V) la fonction $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}, \; g \mapsto \mathrm{Tr}(\rho(g))$. Lorsque (ρ, V) est irréductible on dit que χ_ρ est un caractère irréductible.

Prop 8 : Soient (ρ_i, V_i) $i \in \{1,2\}$ deux représentations de G alors $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$ et $\chi_{\mathrm{Hom}(\rho_1, \rho_2)} = \overline{\chi_{\rho_1}} \chi_{\rho_2}$

déf 9 : Sur l'ensemble des fonctions centrales de G dans $\mathbb{C}$ $\mathcal{FC}(G) = \{\phi : G \to \mathbb{C} \; / \; \forall g, h \in G \;\; \phi(hgh^{-1}) = \phi(g)\}$ on définit le produit scalaire $\forall \phi, \psi \in \mathcal{FC}(G)$
$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g)$$

Th 10 : L'ensemble des caractères irréductibles de G forme une base orthonormée de $\mathcal{FC}(G)$

Cor 11 : Deux représentations de G sont équivalentes si et seulement si elles ont même caractère
Une représentation est irréductible si et seulement si elle est de carré scalaire égal à 1

Appli 12 : Soit ρ_ε la représentation de la signature de $\mathfrak{S}_n$. Si ρ est une autre représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ alors $\mathrm{Hom}(\rho, \rho_\varepsilon)$ est aussi irréductible.

2. Représentations de permutation

X désigne un ensemble fini. Si G agit sur X via un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ alors on a naturellement une représentation de G sur $V_X = \mathrm{Vect}(e_x, x \in X)$:
$$\rho_\varphi : G \to GL(V_X) \;\; , \;\; g \mapsto (e_x \mapsto e_{\varphi(g)(x)})$$

2.1. La représentation régulière

déf 13 : La représentation régulière de G est la représentation $\rho_{rég}$ associée à l'action de G sur lui-même par multiplication à gauche : $\rho_{rég} : G \to GL(\mathrm{Vect}(e_g, g \in G))$
$$: g \mapsto (e_h \mapsto e_{gh})$$

Prop 14 : Le caractère de la représentation régulière est donné par $\chi_{rég}(1) = |G|$ et $\chi_{rég}(g) = 0 \ \forall g \in G \setminus \{1\}$

Cor 15 : Soit $\{\chi_i, i \in I\}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G. Chaque représentation irréductible de G apparaît autant de fois que son degré dans la décomposition de $\rho_{rég}$ en somme d'irréductibles et on a $|G| = \sum_{i \in I} \chi_i(1)^2$

Appli 16 : Un groupe est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1

Prop 17 : Les caractères irréductibles de G de degré 1 sont les $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$, $g \mapsto \bar{\chi}(\bar{g})$ où $\bar{\chi}$ est une représentations irréductible de $G/D(G)$

Prop 18 (admis) : Soit (ρ, V) une représentation irréductible de G de degré d. Alors $d \mid |G|$.

Appli 19 : Un groupe d'ordre p^2 avec p premier est abélien.

2.2. Représentation standard

Prop 20 : Soit $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ une action de G sur X. On note ρ_φ la représentation associée. Alors G agit sur $X \times X$ via $\psi : G \to \mathfrak{S}(X \times X)$, $g \mapsto (x,y) \mapsto (\varphi(g)(x), \varphi(g)(y))$ et si on note ρ_ψ la représentation associée on a

$\rho_\psi \simeq \mathrm{Hom}(\rho_\varphi, \rho_\varphi)$

Prop 21 : Soit χ le caractère de la représentation associée à l'action de G sur X. Alors $\langle \chi, 1 \rangle$ est égal au nombre d'orbites de l'action de G sur X.

Cor 22 : Soit $(\rho, V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n))$ la représentation associée à l'action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1, n]\!]$. Alors (ρ, V) se décompose en deux représentations irréductibles : $(1, \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n))$ (représentation triviale) et $(\rho_s, \mathrm{Vect}(e_1 + \dots + e_n)^\perp)$ (appelée représentation standard)

↳ Utilisation : cf DVT 2

3. Tables de caractères

3.1. Généralités

On place en colonnes les classes de conjugaison de G et en lignes les caractères irréductibles (n.b : il y a autant de lignes que de colonnes)

Prop 23 : Les colonnes de la table sont orthogonales pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^{|\mathrm{Conj}(G)|}$

DVT 1

Prop 24 : Soit (ρ, V) une représentation de G de caractère χ alors $\mathrm{Ker}\,\rho = \{g \in G \ / \ \chi(g) = \chi(1)\}$. On note $\mathrm{Ker}\,\chi := \mathrm{Ker}\,\rho$

Th 25 : Soit $\{\chi_i, i \in I\}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G. Alors les sous-groupes distingués de G sont exactement les $\bigcap_{i \in J} \mathrm{Ker}\,\chi_i$ pour $J \subset I$

DVT 1

Appli 26 : Soient $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Soit $Q_8 = \{\pm Id, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Q_8 est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{C})$ dont la table figure en annexe 1 et dont les sous-groupes distingués sont $\{Id\}$, $\{\pm Id\}$, $\{\pm Id, \pm I\}$, $\{\pm Id, \pm J\}$, $\{\pm Id, \pm K\}$ et Q_8

3.2. Groupes abéliens

Par théorème de structure c'est le cas où $G = \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$ avec $d_1 | \dots | d_n$. Alors les $d_1 \times \dots \times d_n$ caractères irréductibles de G sont de degré 1 et donnés par les images des générateurs $e_i = (0,..,0,1,0,..,0)$ (à la i-ème place) $\chi(e_i) = \omega_i$ où $\omega_i \in \mathbb{U}_{d_i} = \{z \in \mathbb{C} / z^{d_i} = 1\}$

ex 27 : Voir la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ en Annexe 2

3.3. Groupe diédral, groupe symétrique

Soit $D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1 \rangle$ pour $n \geq 3$. On peut réaliser D_n comme le groupe des isométries d'un n-gône régulier du plan. Cela fournit une représentation de D_n de degré 2

ex 28 : Voir la table de D_5 en Annexe 3

rqe 29 : D_4 a la même table que Q_8 mais $D_4 \not\cong Q_8$

ex 30 : On dresse facilement la table de $\mathfrak{S}_3$ en Annexe 4

DVT 2

ex 31 : On a tous les outils pour déterminer la table de $\mathfrak{S}_4$ en Annexe 5

Annexe 1 : Table de Q_8

	(1) Id	(1) $-Id$	(2) $\pm I$	(2) $\pm J$	(2) $\pm K$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Annexe 2 : Table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$

	(1) 0	(1) 1	(1) 2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	j	j^2
χ_3	1	j^2	j

Annexe 3 : Table de D_5

où $a = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $b = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

	(1) 1	(2) $\{r, r^{-1}\}$	(2) $\{r^2, r^{-2}\}$	(5) $\{r^k s\}_{k \in [\![0,4]\!]}$
Trivial	1	1	1	1
det	1	1	1	-1
χ_3	2	$2a$	$2b$	0
χ_4	2	$2b$	$2a$	0

Annexe 4 : Table de $\mathfrak{S}_3$

	(1) Id	(3) $(1\,2)$	(2) $(1\,2\,3)$
1	1	1	1
ε	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Annexe 5 : Table de $\mathfrak{S}_4$

	(1) Id	(6) (12)	(8) (123)	(6) (1234)	(3) (12)(34)
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_3'	3	-1	0	1	-1

Références :

♡ Rauch : Les groupes finis et leurs représentations
Serre : Représentations linéaires des groupes finis (dernière édition)
Ulmer : Théorie des groupes

Intersections de noyaux de caractères

Thibaut Tardieu, Corentin Caillaud

19/01/2016

Référence : Ulmer Notations : G désignera un groupe fini, d'élément neutre e. Les représentations considérées seront toujours sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie. La lettre χ sera réservée aux caractères de G.

Définition 1. Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G, de caractère associé χ. On note :

$$\ker \chi := \{g \in G / \chi(g) = \chi(e)\}$$

L'ensemble $\ker \chi$ est appelé le *noyau du caractère* χ.

On souhaite démontrer le résultat suivant :

Proposition 1. *Soit G un groupe fini, H un sous-groupe distingué de G. Soient $(\chi_i)_{i\in I}$ l'ensemble des caractères irréductibles de G. Alors il existe $J \subset I$ tel que :*

$$H = \bigcap_{i \in J} \ker \chi_i$$

Pour cela, on procèdera en trois étapes :
1. On montrera que $\ker \chi = \ker \rho$.
2. On montrera que H est le noyau d'une certaine représentation de G.
3. On montrera que le noyau d'une représentation ρ est l'intersection des noyaux des représentations irréductibles qui composent ρ.

Ainsi, le résultat voulu sera démontré.

Lemme 2. *Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G, de caractère associé χ. On a alors :*

$$\ker \rho = \ker \chi$$

(d'où la notation $\ker \chi$*)*

Démonstration. Procédons par double inclusion. Notons d le degré de la représentation ρ (d=dim V). Soit $g \in \ker \rho$. On a $\rho(g) = I_d$, donc $\chi(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)) = d = \chi(e)$. On a donc :

$$\ker \rho \subset \ker \chi$$

Réciproquement, soit $g \in \ker \rho$. Comme G est fini, $\exists n \in \mathbb{N}$, $g^n = e$, et donc $\rho(g)^n = I_d$. On en déduit que si λ est valeur propre de $\rho(g)$, on a $\lambda^n = 1$. En particulier, $|\lambda| = 1$. Si on note $\lambda_1, ..., \lambda_d$ l'ensemble des valeurs propres de $\rho(g)$, on a :

$$d = \chi(e) = \chi(g) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i = \left| \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i| = d$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|,$$

et en passant à la partie réelle :

$$\sum_{i=1}^{d} \Re(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|$$

Or, $\forall i \in [\![1, d]\!]$, on a : $\Re(\lambda_i) \leq |\lambda_i|$, d'où l'égalité (raisonner par l'absurde) $\Re(\lambda_i) = |\lambda_i| = 1$, et finalement $\lambda_i = 1$, $\forall i \in [\![1, d]\!]$.
On a ainsi montré que $\rho(g) = I_d$, donc $g \in \ker \rho$, d'où

$$\ker \chi \subset \ker \rho$$

Finalement, on a bien l'égalité souhaitée. □

Lemme 3. *Soit H un sous-groupe distingué de G. Alors il existe une représentation ρ de G telle que $H = \ker \rho$.*

Démonstration. On considère l'action naturelle de G sur G/H : $G \times G/H \to G/H$, $(g, \overline{k}) \mapsto \overline{gk}$, et la représentation par permutation associée : $\rho : G \to GL(V)$, $\rho(g)(e_{\overline{k}}) = e_{\overline{gk}}$ où $V = \text{vect}((e_{\overline{k}})_{\overline{k} \in G/H})$.
Soit d le degré de ρ.
Soit $g \in G$.

$$g \in \ker \rho \iff \rho(g) = I_d \iff \forall \overline{k} \in G/H, e_{\overline{k}} = e_{\overline{gk}} \iff \forall \overline{k} \in G/H, \overline{k} = \overline{gk} \iff \overline{g} = \overline{e} \iff g \in H$$

On a donc $H = \ker \rho$ □

Lemme 4. *Soit (ρ, V) une représentation de G. Soient $(\rho_1, W_1), ..., (\rho_r, W_r)$ des représentations irréductibles de G telles que $V = W_1 \oplus ... \oplus W_r$ et $\rho = \rho_1 \oplus ... \oplus \rho_r$. Alors :*

$$\ker \rho = \bigcap_{i \in [\![1,r]\!]} \ker \rho_i$$

Démonstration. Soit $g \in G$.

$$g \in \ker \rho \iff \rho(g) = Id_V \iff \forall i \in [\![1, r]\!], \rho_i(g) = Id_{W_i} \iff \forall i \in [\![1, r]\!], g \in \ker \rho_i \iff g \in \bigcap_{i \in [\![1,r]\!]} \ker \rho_i$$

On a donc l'égalité souhaité. □

Conclusion :

$$H = \ker \rho = \bigcap_{i \in [\![1,r]\!]} \ker \rho_i = \bigcap_{i \in [\![1,r]\!]} \ker \chi_i$$

où χ_i est la représentation irréductible associée à ρ_i.
Application : recherche des sous-groupes distingués de Q_8, le groupe des quaternions. Le groupe des quaternions peut être vu comme le sous-groupe de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formé des matrices

$$\pm 1 = \pm I_2, \pm i = \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm j = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm k = \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

La table de caractère de Q_8 est :

Q_8	1 Id	1 -Id	2 i,-i	2 j,-j	2 k,-k
1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	1	-1	1	-1
χ_4	1	1	-1	-1	1
χ_5	2	-2	0	0	0

Les sous-groupes distingués de Q_8 sont :

- $\{1\} = \ker \chi_5$
- $\{1, -1\} = \ker \chi_2 \cap \ker \chi_3 \cap \ker \chi_4$
- $\{1, -1, i, -i\} = \ker \chi_2$
- $\{1, -1, k, -k\} = \ker \chi_3$
- $\{1, -1, j, -j\} = \ker \chi_4$
- $Q_8 = \ker 1$

Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Thibaut Tardieu, Corentin Caillaud

19/01/2016

Référence : inspiré de Rauch, *Les groupes finis et leurs représentations*, partie 4.4
Nous allons déterminer la table de caractère de $\mathfrak{S}_4$.
Tout d'abord, on sait qu'il y a cinq classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$, qui correspondent aux types de la permutation. Ainsi, il y a la classe uniquement composée de l'identité, la classe comprenant les 6 transpositions, celle comprenant les 8 3-cycles, celles comprenant les 6 4-cycles et enfin celle comprenant les 3 doubles transpositions. Il y a donc 5 caractères irréductibles.
Caractères irréductibles de degré 1 :
On sait que les caractères de degré 1 de $\mathfrak{S}_4$ sont en bijection avec ceux de $\mathfrak{S}_4/D(\mathfrak{S}_4)$ (voir plan). Or, $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$, donc $\mathfrak{S}_4/D(\mathfrak{S}_4) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, qui a deux caractères de degré 1. On en déduit que $\mathfrak{S}_4$ ne possède que 2 caractères de degré 1, qui sont la représentation triviale $\mathbb{1}$ et la signature ε.
En notant d_χ le degré d'une représentation χ , on a la formule $\sum\limits_{\chi \textit{ irréductible}} d_\chi^2 = |\mathfrak{S}_4| = 24$. En retirant les 2 représentations de degré 1, on a : $\sum\limits_{d_\chi \neq 1} d_\chi^2 = 22$, sachant qu'il reste 3 représentations irréductibles à trouver. On en déduit qu'il reste une représentation irréductible de degré 2, et deux représentations irréductibles de degré 3. (Remarque : si on exhibe toutes les représentations connues à l'avance, on peut sauter cette étape).
On connaît maintenant la taille de la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$, ainsi que ses deux premières lignes :

$\mathfrak{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
$\mathbb{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2					
χ_3					
χ_3'					

Caractère irréductible de degré 2 :
On cherche la représentation irréductible de degré 2. Notons V_4 le groupe engendré par les doubles transpositions de $\mathfrak{S}_4$. V_4 est distingué dans $\mathfrak{S}_4$, et comme $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4 \not\subset V_4$, le quotient $\mathfrak{S}_4/V_4$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, seul groupe d'ordre 6 non commutatif. L'image par la projection $\mathfrak{S}_4 \longrightarrow \mathfrak{S}_4/V_4 \simeq \mathfrak{S}_3$ d'une transposition est une transposition (car d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_3$), l'image d'un 3-cycle est un 3-cycle (car d'ordre 3 dans $\mathfrak{S}_3$), l'image d'un 4-cycle est une transposition (car d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_3$), et enfin l'image d'une double transposition est l'identité de $\mathfrak{S}_3$ (car V_4 est le noyau de la projection).
La représentation standard $\overline{\rho_2}$ de $\mathfrak{S}_3$, de degré 2, induit une représentation ρ_2 de $\mathfrak{S}_4$. Précisément, si $\overline{\sigma}$ désigne la classe de $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ modulo V_4, on a une représentation $\rho_2 : \mathfrak{S}_4 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^2)$ définie par : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4, \rho_2(\sigma) = \overline{\rho_2}(\overline{\sigma})$. Notons χ_2 le caractère associé à la représentation ρ_2 de $\mathfrak{S}_4$ et $\overline{\chi_2}$ le caractère associé à la représentation standard $\overline{\rho_2}$ de $\mathfrak{S}_3$. On a : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4, \chi_2(\sigma) = \overline{\chi_2}(\overline{\sigma})$.
Cependant, on connaît $\overline{\chi_2}$. En effet, le caractère θ associé à la représentation de permutation de $\mathfrak{S}_3$ se décompose en $\theta = \mathbb{1} + \overline{\chi_2}$ (voir plan). En outre, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_3$, $\theta(\sigma) =$ nombre de points fixes de σ. On en déduit les valeurs de $\overline{\chi_2}$:

$\mathfrak{S}_3$	1 Id	3 (12)	2 (123)
$\overline{\chi_2}$	2	0	-1

On peut calculer les valeurs de χ_2, et vérifier que $\langle \chi_2, \chi_2 \rangle = 1$, donc que χ_2 est irréductible. On trouve alors la troisième ligne de la table de $\mathfrak{S}_4$:

$\mathfrak{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3					
χ_3'					

Premier caractère irréductible de degré 3 :

On va donner une interprétation géométrique de la représentation associée. On peut voir $\mathfrak{S}_4$ comme le groupe G des isométries de l'espace affine qui préservent un tétraèdre régulier. En effet, une telle isométrie agit sur les 4 sommets du tétraèdre en les permutant, donc G s'identifie à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Si on note A, B, C, D les 4 sommets du tétraèdre, alors la réflexion orthogonale par rapport au plan passant par C, D et le milieu de $[A, B]$ échange A et B et préserve C et D. On en déduit que toute permutation de $\mathfrak{S}_4$ s'identifie à un élément de G. Comme les permutations engendrent $\mathfrak{S}_4$, on a $G \simeq \mathfrak{S}_4$.

On note O le centre du tétraèdre, et on considère le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$. Comme O est l'isobarycentre de A, B, C et D, O est stable par tout élément de G. G s'identifie à un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ et donc un élément de G peut se voir comme la matrice de l'isométrie vectorielle associée dans la base $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Notons que $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

L'élément s de G qui permute A et B vérifie $s(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}, s(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}, s(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OC}$, sa matrice est donc :

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors, pour toute transposition $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(s) = 1$.

L'élément r de G qui envoie A sur B, B sur C et C sur A vérifie $r(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}, r(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}, r(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}$, sa matrice est donc :

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout 3-cycle $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(r) = 0$.

L'élément g de G qui envoie A sur B, B sur C, C sur D et D sur A vérifie $g(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}, g(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}, g(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, sa matrice est donc :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout 4-cycle $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(g) = -1$.

L'élément h de G qui envoie A sur B, B sur A, C sur D et D sur C vérifie $h(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}, h(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}, h(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, sa matrice est donc :

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On a alors, pour toute double transposition $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, $\chi_3(\sigma) = \mathrm{Tr}(h) = -1$.

$\mathfrak{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_3'					

Remarque : ce caractère peut aussi s'obtenir comme le caractère associé à la représentation standard de $\mathfrak{S}_4$.

<u>Second caractère irréductible de degré 3 :</u>

On peut déduire les valeurs du second caractère irréductible de degré 3 grâce aux relations d'orthogonalité sur les colonnes, et en utilisant $\chi(Id) = d_\chi$. En effet, si $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_4$ ne sont pas dans la même classe de conjugaison, alors $\sum_{\chi \text{ irréductible}} \overline{\chi(\sigma)}\chi(\tau) = 0$.

Remarque : comme $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe au groupe des isométries positives du cube, on peut obtenir le deuxième caractère irréductible de degré 3 en faisant agir $\mathfrak{S}_4$ sur le cube.

Finalement, la table de $\mathfrak{S}_4$ est :

$\mathfrak{S}_4$	1 Id	6 (12)	8 (123)	6 (1234)	3 (12)(34)
$\mathbf{1}$	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	-1	1
χ_2	2	0	-1	0	2
χ_3	3	1	0	-1	-1
χ_3'	3	-1	0	1	-1

1) Orthogonalité des colonnes, ça vient de l'orthogonalité des [illegible] ?
sinon c'est pour les lignes.

2) Table de $\mathcal{A}_4$? Par $\mathcal{A}_4 / D(\mathcal{A}_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et donc on va retrouver dans la table de $\mathcal{A}_4$ la table de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

3) Est-ce que les représentat° irréductibles d'un quotient sont des représentat° irréductibles du gros groupe.
→ en dim 1 elles sont irréductibles donc ok.
→ mais sinon on garde pas obligatoirement l'irréductibilité ?

$\boxed{\text{Oui}}$

avec la définition c'est bon par l'absurde.

4) de la table de $\mathfrak{S}_4$ peut-on donner des construct° géométriques des caractères ε et χ_2.

$\chi_2 \to$ par $\mathfrak{S}_3 \simeq D_3$.

ε, trivial

$-1 \quad 0 \quad 1$

5) $\mathfrak{S}_n \curvearrowright \mathbb{C}[X_1 .. X_n]$ par permutat° des variables.
$\mathfrak{S}_n \curvearrowright A_d = \{P \in \mathbb{C}[X_1 .. X_n]$ homogène de degré $d\}$ exactement d.
$n = 3 \quad d = \{1, 2, 3\}$. trouver les représentation.

$A_1 = \mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3)$ $\quad \mathfrak{S}_3 \curvearrowright A_1$ se décompose en $1 \oplus \rho_{\text{standard}}$.
$A_2 = \mathrm{Vect}(X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2X_3)$