124 — Anneau des séries formelles. Applications.

I) Définitions, premières propriétés [SP]

Soit $\mathbb{K}$ un corps (commutatif).

(A) Généralités :

Déf 1 : On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations : $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = (x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \times (y_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{i} x_k y_{i-k}\right)_{i\in\mathbb{N}}$

Prop 2 : $(\mathbb{K}[[X]], +, \times)$ est un anneau commutatif, intègre. Le neutre pour $+$ est $(0,0,\dots)$, noté 0, et le neutre pour $\times$ est $(1,0,0,\dots)$, noté 1. L'élément $X := (0,1,0,0,\dots)$ vérifie $X^k = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (1 est au rang $k+1$). On utilise alors la notation : $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$.

Prop 3 : $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.

Exemple 4 : $(1-X)^{-1} = (1,1,\dots) = \sum_{i\in\mathbb{N}} X^i$

(B) Valuation et propriétés de l'anneau $\mathbb{K}[[X]]$:

Déf 5 : On appelle valuation de $A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]] \setminus \{0\}$ l'entier : $v(A) := \min\{i\in\mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$

Exemple 6 : $v(X) = 1$, $v(X^2+2) = 0$

Prop 7 : $v(A) = k$ ssi $\exists B \in \mathbb{K}[[X]]$ t.q. $\begin{cases} A = X^k B \\ v(B) = 0 \end{cases}$

Prop 8 : A est inversible ssi $v(A) = 0$.

Prop 9 : $\forall A, B \in \mathbb{K}[[X]]$, on a :
$$\begin{cases} v(A+B) \geqslant \min(v(A), v(B)) \\ v(AB) = v(A) + v(B) \end{cases}$$

Prop 10 : $(\mathbb{K}[[X]], v)$ est un anneau euclidien.

Prop 11 : $\mathbb{K}[[X]]$ est principal et ses idéaux sont les (X^p), $p\in\mathbb{N}$. De plus, c'est un anneau local dont l'idéal maximal est $(X) = \{A \in \mathbb{K}[[X]] \mid v(A) \geqslant 1\}$ [WU]

Déf 12 : On note $\mathbb{A}$ le sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles qui n'ont pas 0 pour pôle.

Prop 13 : L'application $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{K}[[X]] \\ \frac{P}{Q} \longmapsto PQ^{-1} \end{array}$ est bien définie et c'est un morphisme d'anneaux, injectif. Les éléments de $\psi(\mathbb{A})$ sont appelés séries rationnelles. [SP]

Exemple 14 : On identifie $\frac{1}{1-X}$ avec $(1-X)^{-1} = \psi\left(\frac{1}{1-X}\right)$

(C) Familles sommables, composition. [AF]

Déf 15 : Soit $I \subset \mathbb{N}$. Une famille $(S_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}[[X]]^I$ est dite sommable ssi pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble des $i \in I$ t.q. $v(S_i) \leqslant n$ est fini. On pose alors $c_n = \sum_{i\in I} a_{i,n}$ où $(S_i)_{i\in I} = (a_{i,n})_{(i,n)\in I\times\mathbb{N}}$ et la série formelle $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de $(S_i)_{i\in I}$ et notée $\sum_{i\in I} S_i$.

Exemple 16 : $(a_i X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable, ce qui justifie la notation $A = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i X^i$.

Définition 17 : Soient $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$. Si $v(B) > 0$, alors $(a_n B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. On peut alors définir sans ambiguïté la <u>composée</u> de B par A, notée $A \circ B$, par :

$$A \circ B := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n B^n .$$

<u>Exemple 18</u> : Lorsque $S \in \mathbb{K}[[X]]$ vérifie $v(S) > 0$, on a $(1-S)$ inversible et $\frac{1}{1-S} = \sum_{k \in \mathbb{N}} S^k$.

<u>Prop 19</u> : $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$, $b_0 = 0$. On a :

$$\begin{cases} (A+B) \circ C = A \circ C + B \circ C \\ (AB) \circ C = (A \circ C)(B \circ C) \end{cases}$$

[SP]
II) Séries génératrices et suites récurrentes linéaires

<u>Déf 20</u> : Soit $S = (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle <u>série génératrice</u> de S la série formelle $G(S) := \sum_{i \in \mathbb{N}} s_i X^i$

<u>Rq</u> : [C'est donc le même objet mais noté différemment en utilisant la structure de $\mathbb{K}[[X]]$.]

<u>Exemples 21</u> : * $S = (1, 1, \dots) \Leftrightarrow G(S) = \frac{1}{1-X}$

* $S = (1, 2, 3, \dots) \Leftrightarrow G(S) = \frac{1}{(1-X)^2}$

* $\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $S = \left(\binom{j+n-1}{j-1} a^{-(j+n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}$

$\Leftrightarrow G(S) = \frac{1}{(a-X)^j}$

[FGN2] DEV

<u>Application 22</u> : Nombres de partitions d'un entier en parts fixées : soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Soit $u_n := \mathrm{card}\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \mid \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\}$ on a alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$.

<u>Déf 23</u> : On dit que $S = (s_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est <u>une suite récurrente linéaire d'ordre k à partir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}$</u> ssi $\exists k_0 \in \mathbb{N} \geq k$ et des coefficients $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{K}$ t.q. $\forall n \geq k_0$, on ait $s_n = u_1 s_{n-1} + u_2 s_{n-2} + \dots + u_k s_{n-k}$ [SP]

<u>Théorème 23</u> : $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est récurrente lin. à p.c.r. ssi $G(S)$ est une série rationnelle.

<u>Application 24 (Fibonacci)</u> : $u_0 = u_1 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Soit $F = G((u_n)_{n \in \mathbb{N}})$, on a $F = X + XF + X^2 F$ donc $F = \frac{1}{1 - X - X^2}$. Par décomposition en éléments simples, on obtient la forme de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (close) :

$$u_n = \frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \bar{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} .$$

<u>Déf/Prop 25</u> : Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ t.q. $v(S) = 1$, alors il existe une unique série formelle $T \in \mathbb{K}[[X]]$ (d'ordre 1) telle que $S \circ T = T \circ S = X$. La série T est appelée <u>série réciproque</u> de S. [WU]

<u>Théorème 26 (Schur)</u> : $\boxed{\triangle \text{ Ici, } \mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0}$
Soit $S \in \mathbb{K}[[X]]$ tq $v(S) = 1$, on note S_R sa série réciproque. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \geq n$, on a

$$c_k(S_R^n) = \frac{n}{k} c_{k-n}\left(\left(\frac{1}{Q}\right)^k \right) \quad \text{où } Q = \frac{S}{X} \text{ et}$$

$c_i(A) = a_i$ où $A = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$.

[WU]

Application 27 : Développement en série entière d'une fonction implicite : on considère l'équation $y - z\sin y = a$ (1), $y, z \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ fixé. Alors il existe $V \in \mathcal{V}(0)$ et $W \in \mathcal{V}(a)$, ouverts, t.q. (1) définit y comme fonction implicite, i.e. $y = f(z)$ où $f : V \to W$, et on a :

$$\forall z \in V, \quad f(z) = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}\left[\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}\sin(kt)\right]_{t=a}.$$

[SP]

III) Dérivation et équations différentielles

On se place ici dans le cas où $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.

A) Dérivation et applications :

Déf 28 : Soit $A \in \mathbb{K}[[X]]$. On appelle *série formelle dérivée* de A, notée $D(A)$ ou A', la série :

$$A' = D(A) := \sum_{i\in\mathbb{N}^*} i a_i X^{i-1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} (i+1) a_{i+1} X^i \quad \text{où } A = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

Prop 29 : $\forall A, B \in \mathbb{K}[[X]]$, on a :

(i) $A' = 0 \iff A \in \mathbb{K}$

(ii) $(AB)' = A'B + AB'$

(iii) si A est inversible, $(A^{-1})' = -A'A^{-2}$

Exemple 30 : $E_a := \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{a^i}{i!} X^i$ vérifie $E_a' = aE_a$

Prop 31 : L'opérateur $\mathcal{F} : \mathbb{K}[[X]] \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]$, $A \longmapsto XA'$ est linéaire et vérifie : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{F}^k(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}^*} i^k a_i X^i.$$

Application 32 : Soit $A = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^3+2n-1}{n!} X^n$. Alors $A = (X^3+3X^2+3X-1)E_1 + 1$. En particulier, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la convergence de $\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{x^i}{i!}$ en 1 fournit directement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+2n-1}{n!} = 6e + 1.$$

B) Équations différentielles dans $\mathbb{K}[[X]]$: [SP]

Déf 33 : $A \in \mathbb{K}[[X]]$ est dite *Δ-finie* s'il existe $Q_1, \dots, Q_k \in \mathbb{K}[X]$ t.q. A vérifie l'équa. diff. :

$$Q_k A^{(k)} + Q_{k-1} A^{(k-1)} + \dots + Q_0 A = 0$$

Déf 34 : Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est dite *P-récurrente* s'il existe $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X]$ t.q. $\forall n \geq k_0$ où $k_0 \geq k$, on ait : $P_k(n)a_{n+k} + P_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + P_0(n)a_n = 0$

Théorème 35 : $S \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est P-récurrente ssi $G(S)$ est Δ-finie. [FGN1]

Application 36 (Nombres de Bell) : $B_n :=$ nombre de partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$. En posant $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} X^n$, on a $\begin{cases} B' = E_1 B \\ B_0 = 1 \end{cases}$ d'où $B = E_1 \circ (E_1 - 1)$ et finalement, $B_i = \frac{1}{e}\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k^i}{k!}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Application 37 (Nombres de Catalan) : [SP] DEV
$\gamma_n :=$ nbre de "parenthésages" possibles du produit $x_1 \cdots x_n$ ($\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ par déf). Si $C = \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n X^n$ on trouve que C vérifie $X(4X-1)C' + (2X-1)C + 1 = 0$, d'où $\gamma_{i+1} = \frac{4i+2}{i+2}\gamma_i$ et enfin $\gamma_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$.

[WU] **IV) Topologie sur $\mathbb{K}[[X]]$** (Bonus)

Soit $\rho \in]0,1[$. On pose $v(0) = +\infty$.

Prop 38 : L'application $d : \mathbb{K}[[X]] \times \mathbb{K}[[X]] \to [0,+\infty[$, $(S,T) \longmapsto \rho^{v(S-T)}$ est une distance sur $\mathbb{K}[[X]]$.
Elle est ultramétrique, i.e. vérifie :
$\forall S,T,U \in \mathbb{K}[[X]],\quad d(S,T) \leq \max(d(S,U), d(U,T))$

Théorème 39 :
$(\mathbb{K}[[X]], d)$ est un espace métrique complet.

Rq : $(\mathbb{K}[X], d)$ n'est pas complet : en effet,
$S_n := \sum_{i=0}^{n} X^i \in \mathbb{K}[X]$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $\mathbb{K}[X]$ pour d.

Prop 40 : $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ pour d.
Plus précisément, $\mathbb{K}[[X]]$ est le complété de $\mathbb{K}[X]$.

Prop 41 : Soit $S_n = (a_{i,n})_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[[X]]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On a :
$\left(\sum_{k=0}^{n} S_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $d \iff (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
Lorsque c'est le cas, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} S_k\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_n \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n X^n$
où $c_n = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,n}$ comme dans la déf. **15**.

RÉFÉRENCES :

* [SP] Philippe Saux Picart, "Cours de calculs formels. Algorithmes fondamentaux".
* [AF] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse, "Cours de mathématiques 1, Algèbre".
* [FGN1] Oraux X-ENS, Algèbre 1.
* [FGN2] Oraux X-ENS, Analyse 2.
* [WU] Wulfram Giorgi, "Thèmes mathématiques pour l'agrégation".
* Wilf. Generating functionology.