124

ANNEAU DES SÉRIES FORMELLES. APPLICATIONS.

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps commutatif de caractéristique nulle.

I L'ANNEAU $\mathbb{K}[[X]]$

1 Structure de l'ensemble des séries formelles

Déf 1 : ([SP], VI.1.1)
On note $\mathbb{K}[[X]]$ l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni des opérations suivantes :
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\sum_{k=0}^{n}x_k y_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Prop 2 : ([SP], VI.1.1)
$\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau commutatif intègre, d'éléments neutres :
pour $+$: $0:=(0)_{n\in\mathbb{N}}$; pour $\cdot$: $1:=(\delta_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (Symbole de Kronecker)

Rq 3 : ([SP], VI.1.1)
On note X la suite $(\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et désormais $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n$ désignera $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Prop 4 : Éléments inversibles ([SP], VI.1.1)
Soit $A:=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n\in\mathbb{K}[[X]]$.
A est inversible dans $\mathbb{K}[[X]]\Leftrightarrow a_0\neq 0$.

Ex 5 : ([SP], VI.1.1)
$1-X$ est inversible dans $\mathbb{K}[[X]]$ et $(1-X)^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}X^n\in\mathbb{K}[[X]]$.

Déf 6 : Valuation ([SP], VI.1.1)
Soit $A\in\mathbb{K}[[X]]\setminus\{0\}$, $\nu(A)=\min\{n\in\mathbb{N}\mid a_n\neq 0\}$ est la valuation de A.
Par convention, $\nu(0)=+\infty$.

Prop 7 : ([SP], VI.1.1)
Soient $A,B\in\mathbb{K}[[X]]$; on a : $\nu(A+B)\geq\min\{\nu(A),\nu(B)\}$ et $\nu(A.B)=\nu(A)+\nu(B)$.

Prop 8 : Idéaux ([FG], exo 2.25)
Les idéaux non-nuls de $\mathbb{K}[[X]]$ sont les (X^p) où $p\in\mathbb{N}$.
$\mathbb{K}[[X]]$ est donc principal et X est son seul irréductible (à association près).

Prop 9 : ([FG], exo 2.25)
Muni du stathme ν, $\mathbb{K}[[X]]$ est un anneau euclidien.

Thm 10 : ([SP], VI.1.1)
On note $\mathbb{K}(X)_0$ l'ensemble des fractions rationnelles qui n'ont pas 0 pour pôle et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
L'application $\psi : \begin{cases}\mathbb{K}(X)_0 \longrightarrow \mathbb{K}[[X]]\\ \frac{P}{Q}\longmapsto P.Q^{-1}\end{cases}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

Rq 11 : Cela permet d'identifier des fractions rationnelles à des séries formelles. Par exemple $\frac{1}{1-X}\in\mathbb{K}(X)_0$ et $\psi\left(\frac{1}{1-X}\right)=(1-X)^{-1}\in\mathbb{K}[[X]]$;
on écrit dans $\mathbb{K}[[X]]$: $\frac{1}{1-X}=\sum_{n\in\mathbb{N}}X^n$.

Ex 12 : ([ADF], exo VIII.5.3)
Soient $p,q\in\mathbb{N}^*$ avec $p\wedge q=1$; soient $u,v\in\mathbb{N}$, tels que $up-vq=1$.
Alors $\frac{1}{(1-X^p)(1-X^q)}=\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\left\lfloor\frac{un}{q}\right\rfloor+1+\left\lfloor\frac{-vn}{p}\right\rfloor\right)X^n$ dans $\mathbb{R}[[X]]$.

2 Opérations

Déf 13 : Sommabilité ([AF], VIII.4)
Soit $I=\mathbb{N}$; $(S_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}[[X]]^I$ où $S_i=(a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, $i\in I$.
$(S_i)_{i\in I}$ est sommable $\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}$, $\{i\in I\mid a_{i,n}\neq 0\}$ est fini.
On pose alors $c_n=\sum_{i\in I}a_{i,n}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[[X]]$ est appelée somme de la famille $(S_i)_{i\in I}$, et notée $\sum_{i\in I}S_i$.

Rq 14 : ([AF], VIII.4)
La famille $(a_iX^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable. Cela justifie la notation $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_nX^n$, quand $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}[[X]]$.

Ex 15 : ([AF], VIII.4)
Soit $S\in\mathbb{K}[[X]]$, avec $\nu(S)\geq 1$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\nu(b_nS^n)\geq n$ et la famille $(b_nS^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

Déf 16 : Composition ([AF], VIII.4)
Soit $S\in\mathbb{K}[[X]]$ avec $\nu(S)\geq 1$ et $T=\sum_{n\in\mathbb{N}}t_nX^n\in\mathbb{K}[[X]]$
On définit la composée $T\circ S=\sum_{n\in\mathbb{N}}t_nS^n\in\mathbb{K}[[X]]$.

Ex 17 :
Si $S\in\mathbb{K}[[X]]$ et $\nu(S)\geq 1$, $1-S\in\mathbb{K}[[X]]^\times$ et $(1-S)^{-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}S^n$.

App 18 : Polynômes de Tchebychev de 2nde espèce ([AF], VIII.5)
On définit U_n sur $]-1,1[$ par : $U_n(\cos\theta)=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
En décomposant de deux façons différentes $F=\frac{1}{1-2X\cos\theta+X^2}$ où $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$
on montre que $U_n(X)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}X^{n-2k}$

Prop 19 : ([AF], VIII.4)
Soient $S,T,U\in\mathbb{K}[[X]]$ avec $\nu(S),\nu(T)\geq 1$. Alors :
1) $\nu(U\circ S)=\nu(U)\,\nu(S)$
2) L'application $\begin{cases}\mathbb{K}[[X]]\longrightarrow\mathbb{K}[[X]]\\ V\longmapsto V\circ S\end{cases}$ est un morphisme d'anneaux
3) $U\circ(T\circ S)=(U\circ T)\circ S$ (associativité)

Déf 20 : Dérivation ([SP], VI.1.2)
Soit $A\in\mathbb{K}[[X]]$, on appelle série formelle dérivée de A la série :
$A'=D(A):=\sum_{n\in\mathbb{N}^*}na_nX^{n-1}=\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a_{n+1}X^n$.

Prop 21 : ([SP], VI.1.2)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[[X]]$.

1) $A' = 0 \Leftrightarrow A \in \mathbb{K}$.

2) $(AB)' = AB' + A'B$ et si $A \in \mathbb{K}[[X]]^\times$, $(A^{-1})' = -A'.A^{-2}$

3) Si $\nu(A) \geq 1$, alors $(B \circ A)' = A'.B' \circ A$.

3 Quelques séries formelles usuelles dans $\mathbb{C}[[X]]$

Ex 22 : ([AF], VIII.5)

$\exp(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!} X^n$; $\sin(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} X^{2n+1}$; $\ln(1+X) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $(1+X)^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{\alpha}{n} X^n$ où $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ et $\binom{\alpha}{0} = 1$.

App 23 : Dénombrement dans $\mathfrak{S}_n$ ([AF], VIII.5 + [ADF], exo VIII.5.7)

- D_n : nombre de dérangements (permutations sans point fixe) dans $\mathfrak{S}_n$.
  On a : $D_0 = 1$, $D_1 = 0$ et pour $n \geq 2$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k = n!$
  On pose $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{D_n}{n!} X^n$ et on a : $S = \frac{\exp(-X)}{1-X}$. D'où $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
- I_n : nombre d'involutions ($\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\sigma^2 = Id$) dans $\mathfrak{S}_n$.
  On a : $I_0 = I_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, $I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$
  On pose $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{I_n}{n!} X^n$ et on a : $S = \exp(X + \frac{X^2}{2})$. D'où $I_n = \sum_{p+2q=n} \frac{n!}{p!q!2^q}$

App 24 : Nombres de Bell ([XENSAl1, exo 1.6)

B_n : nombre de partitions de l'ensemble $[[1,n]]$.

On a $B_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

On pose $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} X^n$ et on a : $F = \exp(\exp(X)-1)$. D'où $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$.

II SÉRIES GÉNÉRATRICES ET SUITES RÉCURRENTES LINÉAIRES

1 Séries génératrices

Déf 25 : ([SP], VI.1.3)

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$; alors $(S_n X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{N}} S_n X^n \in \mathbb{K}[[X]]$ est appelée série génératrice de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ex 26 : ([SP], VI.1.3)

$S_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \rightsquigarrow \frac{1}{1-X^2}$; $S_n = n+1 \rightsquigarrow \frac{1}{(1-X)^2}$; $S_n = 2^n \rightsquigarrow \frac{1}{1-2X}$.

App 27 : ([SP], VI.1.3)

On note $G = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{n^3+2n-1}{n!} X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ et on a : $G = (X^3+3X^2+3X-1)\exp(X)+1$.

La convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$ en 1 fournit alors : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2n-1}{n!} = 6e+1$.

App 28 : Partitions d'un entier en parts fixées ([XENSAn2], exo 3.15)

DÉVELOPPEMENT N°1

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$;

$u_n = \#\{(x_1,\dots,x_k) \in \mathbb{N}^k \mid a_1x_1 + \dots + a_kx_k = n\}$

Alors $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

App 29 : Façons de faire n € avec des pièces de 1, 2 ou 5 € ([XENSAn2], exo 3.15)

u_n : ce nombre de façons ; on a : $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^5)}$

On obtient $u_n = \frac{(n+1)(n+2)}{20} + \frac{n+1}{4} + \frac{13}{40} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{\varepsilon_n}{5}$ où $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv 0;2[5] \\ 0 \text{ si } n \equiv 1[5] \\ -1 \text{ si } n \equiv 3;4[5] \end{cases}$

App 30 : Formules de Newton ([FG], exo 5.6)

Soit $P = (X-X_1)\dots(X-X_n) \in \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n][X]$.

On note $\sigma_1 = X_1 + \dots + X_n$, $\sigma_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + \dots + X_{n-1}X_n$, …, $\sigma_n = X_1 \dots X_n$ les fonctions symétriques élémentaires en $X_1, \dots, X_n$; et pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $N_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k$.

En considérant $S = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} N_k X^k\right)(1 - \sigma_1 X + \dots + (-1)^n \sigma_n X^n)$, on montre que :

- si $p \in [[1,n]]$: $N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} N_1 + (-1)^p \sigma_p p = 0$
- si $p \geq n+1$: $N_p - \sigma_1 N_{p-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} N_{p-n+1} + (-1)^n \sigma_n N_{p-n} = 0$.

App 31 : Théorème de Molien ([Lei], p.95)

DÉVELOPPEMENT N°2

Soit $u \in Gl_n(\mathbb{C})$; pour $P \in A := \mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$, on pose :

$\sigma(u)(P) = P(u^{-1}(X_1,\dots,X_n)^t)$.

Alors :

1) L'application $\sigma : Gl_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(A)$ est bien définie et est un morphisme de groupes. Elle induit, par restriction, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un morphisme $\sigma_k : Gl_n(\mathbb{C}) \longrightarrow Aut(A_k)$, où A_k désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré k.

2) Si G est un sous-groupe fini de $Gl_n(\mathbb{C})$, Alors G agit aussi sur A_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et :

$$\frac{1}{\#G} \sum_{g\in G} \frac{1}{\det(I_n - gX)} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \dim(A_k^G) X^k.$$

2 Suites récurrentes linéaires ([SP], VI.2)

Déf 32 :

On dit qu'une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k à partir d'un certain rang $k_0 \in \mathbb{N}$, s'il existe $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ tels que : $\forall n \geq k_0$, $S_n = a_1 S_{n-1} + a_2 S_{n-2} + \dots + a_k S_{n-k}$.

Dans ce cas, son polynôme caractéristique est le polynôme $P = X^k - a_1 X^{k-1} - a_2 X^{k-2} - \dots - a_k$.

Prop 33: (cf thm 10)

Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, S sa série génératrice.

$S \in \mathrm{Im}(\psi) \Leftrightarrow (s_n)_n$ est récurrente linéaire à partir d'un certain rang.

Ex 34: Suite de Fibonacci

On définit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ et $\forall n \geq 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

On pose $F = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n X^n$ et on a: $F = \frac{1}{1-X-X^2}$.

On en déduit: $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n = \frac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ où $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

III ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS $\mathbb{K}[[X]]$

1 Suites P-récurrentes et séries Δ-finies ([SP], VI.3.1)

Déf 35:

Une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est polynomialement récurrente (P-récurrente)

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \exists P_0, \dots, P_k \in \mathbb{K}[X], \exists k_0 \geq k, \forall n \geq k, P_k(n) s_{n+k} + \dots + P_0(n) s_n = 0.$

Ex 36:

La suite qui fournit la série exponentielle est P-récurrente car elle vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) a_{n+1} = a_n$.

Déf 37:

Une série $S \in \mathbb{K}[[X]]$ est différentiellement finie (Δ-finie)

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \exists Q_0, \dots, Q_k \in \mathbb{K}[X], \; Q_k S^{(k)} + \dots + Q_1 S' + Q_0 S = 0$

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, \exists Q_0, \dots, Q_k, Q \in \mathbb{K}[X], \; Q_k S^{(k)} + \dots + Q_1 S' + Q_0 S = Q.$

Ex 38:

$\exp(X) \in \mathbb{K}[[X]]$ est Δ-finie car : $(\exp(X))' = \exp(X)$.

Thm 39:

Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $S \in \mathbb{K}[[X]]$ sa série génératrice.

On a: $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est P-récurrente $\Leftrightarrow$ S est Δ-finie.

Coro 40:

Soit (E) une équation différentielle d'ordre k dans $\mathbb{K}[[X]]$, et à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$.

On note d le degré maximal des coefficients polynomiaux de (E).

Alors (E) possède des solutions définies à un polynôme près, et ce polynôme est de degré au plus $d+k$.

Ex 41:

Le système $\begin{cases} X^2U' + (2X-1)U + 1 = 0 \\ u_0 = 1 \end{cases}$ possède une unique solution:

$U = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)!\, X^n.$

2 Application aux nombres de Catalan ([SP], VI.4)

Déf 42:

Soient $(n+1)$ nombres $x_0, \dots, x_n$ placés dans un ordre fixé, dont le produit doit être calculé.

On note γ_n le nombre de manières d'installer des parenthèses dans le produit $x_0 x_1 \dots x_n$ de sorte que l'ordre dans lequel on effectuera les n multiplications soit complètement fixé.

On convient que $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$.

Ex 43:

$\gamma_2 = 2$: $x_0(x_1x_2)$; $(x_0x_1)x_2$

$\gamma_3 = 5$: $x_0(x_1(x_2x_3))$; $x_0((x_1x_2)x_3)$; $(x_0(x_1x_2))x_3$; $((x_0x_1)x_2)x_3$; $(x_0x_1)(x_2x_3)$.

Prop 44:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $\gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i \gamma_{n-1-i}$.

→ On note C la série génératrice de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

→ La relation de récurrence traduit $XC^2 - C + 1 = 0$

→ En dérivant, on obtient $C' = \frac{-C^2}{2XC-1}$.

→ Dans $\mathbb{K}(X)[Y]$, $XY^2 - Y + 1$ et $2XY - 1$ sont premiers entre eux.

On obtient la relation de Bézout:

$$\frac{-2XY+1}{4X-1}(2XY-1) + \frac{4X}{4X-1}(XY^2 - Y + 1) = 1$$

→ On en déduit que:

$$\frac{1}{2XC-1} = \frac{-2XC+1}{4X-1}$$

→ Puis $C' = C^3 \cdot \frac{2X}{4X-1} + C^2 \cdot \frac{-1}{4X-1}$

→ Par division euclidienne dans $\mathbb{K}(X)[Y]$, $C' = C \cdot \frac{-(2X-1)}{X(4X-1)} - \frac{1}{X(4X-1)}$

→ Donc C est Δ-finie: $X(4X-1)C' + (2X-1)C + 1 = 0$

→ On obtient une relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; (2+n)\gamma_{n+1} = (4n+2)\gamma_n, \text{ avec } \gamma_0 = 1.$$

→ Et on obtient: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$.

Références :

[ADF] : Arnaudiès, Delezoïde, Fraysse — Exercices résolus d'algèbre du cours de mathématiques 1 (Dunod, 1994)

[AF] : Arnaudiès, Fraysse — Cours de mathématiques 1 Algèbre (Dunod, 1996)

[FG] : Francinou, Gianella — Exercices de mathématiques pour l'agrégation Algèbre 1 (Masson, 1997)

[Lei] : Leichtnam — Exercices corrigés de mathématiques Polytechnique - ENS Algèbre & Géométrie (Ellipses, 1999)

[SP] : Saux-Picart — Cours de calcul formel Algorithmes fondamentaux (Ellipses, 1999)

[XENS] : Francinou, Gianella, Nicolas — Exercices de mathématiques Oraux X-ENS (Cassini ; Algèbre 1 : 2007, Analyse 2 : 2004)

Théorème de Molien

Arnaud Stocker et Florian Lemonnier

Théorème 1. *Soit* $u \in GL_n(\mathbb{C})$*. Pour* $P \in A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ *on pose* $\sigma(u)(P) = P(u^{-1}(X_1, ..., X_n)^t)$*. Alors :*

1. *L'application* $\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(A)$ *est bien définie et est un morphisme de groupes.* $\forall k \in \mathbb{N}$*, ce morphisme induit, par restriction, un morphisme* $\sigma_k : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(A_k)$ *où* A_k *désigne l'ensemble des polynômes homogènes de degré* k*.*
2. *Si* G *est un sous-groupe fini de* $GL_n(\mathbb{C})$*,* G *agit aussi sur* A_k *et on a :*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I_n - gX)} = \sum_{k=0}^{\infty}\dim(A_k^G)X^k,$$

où $A_k^G = \{P \in A_k \mid \forall g \in G\ \sigma_k(g)(P) = P\}$*.*

Démonstration. 1. Soient $u, v \in GL_n(\mathbb{C})$ et $P \in A = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, alors :

$$\sigma(u \circ v)(P) = P(v^{-1} \circ u^{-1}(X_1, ..., X_n)^t) = \sigma(u)(P(v^{-1}(X_1, ..., X_n)^t)) = \sigma(u) \circ \sigma(v)(P).$$

Comme $\sigma(id) = id$, on en déduit que $\forall u \in GL_n(\mathbb{C})$, $\sigma(u)$ est inversible, d'inverse $\sigma(u^{-1})$. Les $\sigma(u)$ étant linéaires, $\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Aut}(A)$ est bien définie et est un morphisme de groupes.
Notons $u^{-1} = (u_{i,j}^{-1})_{1\leq i,j\leq n}$. Alors, en écrivant

$$\sigma(u)(P) = P(\sum_{i=1}^{n} u_{1,i}^{-1}X_i, ..., \sum_{i=1}^{n} u_{n,i}^{-1}X_i),$$

on remarque que le degré de P est invariant sous l'action de $GL_n(\mathbb{C})$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$ et $\forall u \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $\sigma(u)(A_k) \subset A_k$. On obtient donc un morphisme

$$\begin{aligned} \sigma_k : GL_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow Aut(A_k) \\ u &\longmapsto \sigma(u)_{|A_k} \end{aligned}$$

2. Considérons désormais G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$, agissant sur A_k via le morphisme $\sigma_{k|G}$ (que je noterai σ_k aussi, par commodité).
D'après le théorème de Lagrange, le polynôme $X^{|G|} - 1$, qui est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, est un polynôme annulateur de g, $\forall g \in G$. Par conséquent, les éléments de G sont diagonalisables.
Soit $g \in G$. Il existe donc une matrice $u \in GL_n(\mathbb{C})$ et des complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $ugu^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.
Par suite,

$$\frac{1}{\det(I_n - gX)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_i X} = \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\lambda_i^l X^l\right) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k X^k,$$

où $v_k = \sum\limits_{k_1+...+k_n=k} \lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n}$.
D'autre part, $\mathrm{Tr}(\sigma_k(g^{-1})) = \mathrm{Tr}(\sigma_k(ug^{-1}u^{-1}))$ car $\sigma_k(g^{-1})$ et $\sigma_k(ug^{-1}u^{-1})$ sont conjugués dans $\mathrm{Aut}(A_k)$.
Or, $\sigma_k(ug^{-1}u^{-1})(X_1^{k_1}...X_n^{k_n}) = \lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n}X_1^{k_1}...X_n^{k_n}$ et $\{X_1^{k_1}...X_n^{k_n} \mid k_1+...+k_n=k\}$ est une base de A_k. Il s'ensuit que,

$$\mathrm{Tr}(\sigma_k(g^{-1})) = \sum_{k_1+...+k_n=k} \lambda_1^{k_1}...\lambda_n^{k_n} = v_k,$$

et donc,

$$\frac{1}{\det(I_n - gX)} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Tr}(\sigma_k(g^{-1}))X^k.$$

La conclusion est alors une conséquence du lemme suivant, qui sera démontré à la fin :

Lemme 1. *Sous les hypothèses du théorème,* $\dim(A_k^G) = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\mathrm{Tr}(\sigma_k(g))$.

En effet, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I_n-gX)} &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{Tr}(\sigma_k(g^{-1}))X^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}(\sigma_k(g^{-1}))\right)X^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\dim(A_k^G)X^k.\end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme.
Posons $f = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\sigma_k(g)$, dont la trace est exactement $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G}\mathrm{Tr}(\sigma_k(g))$. On va montrer que f est une projecteur sur A_k^G ce qui suffira pour conclure.

- Soit $P \in A_k^G$. Alors, $\forall g \in G$, $\sigma_k(g)(P) = P$ et donc $f(P) = P$. Cela montre que $A_k^G \subset \mathrm{Im}(f)$,
- Soit $P \in \mathrm{Im}(f)$. Alors, $P = f(Q)$ pour un certain Q dans A_k. Par suite, $\forall h \in G$,

$$\sigma_k(h)(P) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sigma_k(hg)(Q) = f(Q) = P.$$

En conséquence, $\mathrm{Im}(f) = A_k^G$ et $f^2 = f$.

□

Partitions d'un entier en parts fixées

Arnaud STOCKER, Florian LEMONNIER – 29 janvier 2015

[X-ENS An2], exercice 3.15

Théorème

Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \# \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \middle| a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = n \right\}$$

Alors on a :

$$u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Démonstration :

Étape 1 : Considérons le produit de Cauchy des séries formelles $\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i}$, pour $i \in [\![1,k]\!]$.

On note $f(X)$ ce produit de Cauchy ; on a les égalités suivantes :

$$f(X) = \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{x_i=0}^{\infty} X^{a_i x_i} \right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - X^{a_i}}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{N}^k \\ a_1x_1+\dots+a_kx_k=n}} 1 \right) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n$$

Étape 2 : Décomposons la fraction rationnelle $f(X)$ en éléments simples.

La série formelle $f(X)$ est la série génératrice de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; c'est une fraction rationnelle dont les pôles sont les racines $a_1^{\text{èmes}}, \dots, a_k^{\text{èmes}}$ de l'unité.
Le pôle 1 est de multiplicité k.
Soit $\omega \neq 1$ un pôle de f. Comme $\frac{1}{1 - X^{a_i}}$, où $i \in [\![1,k]\!]$, n'a que des pôles simples, ω est de multiplicité inférieure ou égale à k. Par l'absurde, on suppose que ω soit un pôle de multiplicité k.
On aurait alors : $\forall i \in [\![1,k]\!], \omega^{a_i} = 1$.
Or, d'après le théorème de Bezout, les $(a_i)_{i\in[\![1,k]\!]}$ étant premiers entre eux dans leur ensemble :

$$\exists \, (u_1, \dots, u_k) \in \mathbb{Z}^k, a_1 u_1 + \ldots + a_k u_k = 1$$

Alors $\omega = \omega^{\sum_{i=1}^{k} a_i u_i} = \prod_{i=1}^{k} (\omega^{a_i})^{u_i} = 1$.
Contradiction ! On en déduit donc que la multiplicité du pôle $\omega \neq 1$ est strictement inférieure à k.
Notons $\mathcal{P} = \{\omega_1, \dots, \omega_p\}$ l'ensemble des pôles de $f(X)$, avec $\omega_1 = 1$.
Par décomposition en éléments simples, il existe $c_{i,j} \in \mathbb{C}$ pour $i \in [\![1,p]\!]$, $j \in [\![1,k-1]\!]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, tels que :

$$f(X) = \frac{\alpha}{(1-X)^k} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1}} \frac{c_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

Étape 3 : Développons en série formelle les éléments simples de $f(X)$.

En effet, pour $\omega \in \mathcal{P}$ et $j \in [\![1,k]\!]$, $\frac{1}{(\omega - X)^j}$ est développable en série formelle. Ses coefficients s'obtiennent en dérivant $(j-1)$ fois le développement en série formelle de $\frac{1}{\omega - X}$.
On a :

$$\frac{1}{\omega - X} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{X}{\omega}} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{X}{\omega} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{\omega^{n+1}}$$

Puis, pour $j \in [\![1, k]\!]$,

$$\frac{(j-1)!}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} n(n-1)\dots(n-j+2)\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{(\omega - X)^j} = \sum_{n=j-1}^{\infty} \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}\frac{X^{n-j+1}}{\omega^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+j-1)!}{(j-1)!n!}\frac{X^n}{\omega^{n+j}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n}\frac{X^n}{\omega^{n+j}}$$

Ainsi :

$$f(X) = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} X^n + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1}} c_{i,j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{n} \frac{X^n}{\omega^{n+j}} \right)$$

Étape 4 : Déduisons-en un équivalent de u_n en l'infini.
La dernière expression de $f(X)$ nous fournit, par unicité du développement en série formelle :

$$u_n = \alpha \binom{n+k-1}{n} + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant k-1}} c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}}$$

Or, pour $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $\binom{n+r-1}{n} = \frac{(n+r-1)\dots(+1)}{(r-1)!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$.
Ainsi, $\alpha \binom{n+r-1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}$
Et $\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1-k-1]\!], c_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \frac{1}{\omega^{n+j}} = o\left(n^{k-1}\right)$, car les pôles de $\mathcal{P}$ sont des racines de l'unité, donc de module 1.
Par conséquent,

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \alpha \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$$

Reste à calculer α.
Pour cela, on multiplie $f(X)$ par $(1-X)^k$ et on substitue 1 à X :

$$(1-X)^k f(X) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1+X+\dots+X^{a_i-1}}$$

$$\alpha + 0 = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$$

D'où :

$$u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \blacksquare$$

Références

[X-ENS An2] S. FRANCINOU, H. GIANELLA et S. NICOLAS – *Oraux X-ENS Analyse 2*, 2e éd., Cassini, 2009.