K désigne un corps commutatif de caractéristique 0

1. Définitions et propriétés algébriques

1.1. Opérations sur les séries formelles

déf 1 : On note $K[[X]]$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}$ à valeurs dans K muni des 3 opérations suivantes :

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ pour } \lambda \in K$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

qui en font une algèbre commutative

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$

rqe 2 : K et $K[X]$ s'identifient aux éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $K[[X]]$ vérifiant respectivement $\forall n \geq 1 \ a_n = 0$ et $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \ a_n = 0$

déf 3 : On définit la dérivation $D : K[[X]] \to K[[X]]$

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \longmapsto D(A) = A' = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} X^n$$

Prop 4 : Soit $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in K[[X]]$ on a

$$A' = 0 \iff \forall n \geq 1 \ a_n = 0 \quad (\text{i.e. } A \in K)$$

Prop 5 : $\forall A, B \in K[[X]] \quad (AB)' = A'B + B'A$

rqe 6 : Par récurrence on a aussi la formule de Leibniz pour la dérivée $n^{\text{ème}}$ d'un produit

ex 7 : Pour tout $a \in K$ il existe une unique série formelle $E_a \in K[[X]]$ vérifiant l'équation $E' = aE$ et de premier terme 1. On note aussi

$$E_a = \exp(aX) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} X^n$$

On a $\forall a, b \in K \quad \exp(aX)\exp(bX) = \exp((a+b)X)$

déf 8 : Soit $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in K[[X]] \setminus \{0\}$. On appelle valuation de A l'entier

$$v(A) = \min \{ i \in \mathbb{N} \,/\, a_i \neq 0 \}$$

rqe 9 : Pour $A \in K[[X]] \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{N}$ on a

$$v(A) = b \iff \exists A_1 \in K[[X]] \setminus \{0\} \text{ tel que } A = X^b A_1 \text{ et } v(A_1) = 0$$

Prop 10 : $\forall A, B \in K[[X]] \setminus \{0\}$ on a

$$v(A+B) \geq \min(v(A), v(B)) \text{ et } v(AB) = v(A) + v(B)$$

Déf 11 : Soient $A = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $B = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n \in K[[X]]$ tels que $a_0 = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note

$A^k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k,n} X^n$. Alors $\forall n < k \ a_{k,n} = 0$

on peut donc définir

$$B \circ A := \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k a_{k,n} \right) X^n$$

Prop 12 : Soit $A \in K[[X]] \setminus \{0\}$ tel que $v(A) \geq 1$. On a équivalence entre

(i) : Il existe $B \in K[[X]] \setminus \{0\}$ tel que $v(B) \geq 1$ et $A \circ B = X$

(ii) : $v(A) = 1$

De plus si l'une de ces conditions est vérifiée alors B est unique et $v(B)=1$

Prop 13 : Soient $A, B \in K[[X]] \setminus \{0\}$ avec $v(A) \geq 1$ alors $(B \circ A)' = (B' \circ A) A'$.

ex 14 : Si on définit $\mathrm{Log}(1+X) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n \in \mathbb{C}[[X]]$ alors $\exp(\mathrm{Log}(1+X)) = 1+X$

1.2. Propriétés algébriques de $K[[X]]$

Pté 15 : $K[[X]]$ est un anneau commutatif intègre

Prop 16 : $A \in K[[X]] \setminus \{0\}$ est inversible si et seulement si $v(A) \geq 1$

Prop 17 : $(K[[X]], v)$ est un anneau euclidien

Ses idéaux sont donc principaux, on peut les décrire :

Prop 18 : Les idéaux non triviaux de $K[[X]]$ sont les $X^k K[[X]]$ avec $k \in \mathbb{N}^*$

Prop 19 : $K[[X]]$ admet un unique élément irréductible (modulo multiplication par un inversible) c'est X.

2. Séries génératrices

L'étude d'une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ peut être facilitée par l'introduction de la série formelle $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n X^n$ appelée série génératrice de (x_n).

2.1. Fractions rationnelles

Lemme 20 : Soit $A \subset K(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles n'admettant pas 0 pour pôle alors tout élément de A admet un représentant de la forme $\frac{P}{Q}$ avec $Q \in K[X]$ et $v(Q) \geq 1$. L'application $: A \longrightarrow K[[X]]$ est bien définie et injective $: \frac{P}{Q} \mapsto PQ^{-1}$

rqe 21 : On identifie donc A à un sous-anneau de $K[[X]]$ et on transporte les opérations connues sur $K(X)$ dans $K[[X]]$:

ex 22 : Par dérivation $\frac{1}{(1-X)^{a+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a+n}{a} X^n$ pour tout $a \in \mathbb{N}$

ex 23 : On dispose de la décomposition en éléments simples.

DVT 1

Th 24 : Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}$ soit

$$u_n = \#\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,/\, \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\}$$

Alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a_1 \dots a_k} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}$

Prop 25 : Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n \in K[[X]]$ alors :

$$S \in A \iff \begin{pmatrix} \exists N \in \mathbb{N} \ \exists p \in \mathbb{N}^* \ \exists a_0, \dots, a_{p-1} \in K \\ \forall n \geq N \quad u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i} \end{pmatrix}$$

ex 26 : Soit (u_n) la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \geq 0$ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n$ vérifie

$S = X + XS + X^2 S$ donc $S = \dfrac{X}{1-X-X^2}$

Par décomposition en éléments simples

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\varphi X)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\tilde{\varphi} X)} \quad \text{où } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \tilde{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n X^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\varphi}^n X^n \right)$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \dfrac{\varphi^n - \tilde{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$.

2.2. Autres applications

DVT 8

Th 27 : Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$

Soit $\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL(\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n])$

$: A \mapsto (P(X) \mapsto P(AX))$ où $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$

Soit $\forall k \in \mathbb{N}$ $A_k = \{P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ homogène de degré $k\}$

et soit $A_k^G = \{P \in A_k \ / \ \forall g \in G \ \sigma(g)(P) = P\}$

Alors dans $\mathbb{C}[[z]]$ on a : $\boxed{\dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \dfrac{1}{\det(I - zg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dim(A_k^G) z^k}$

Dans certains exemples, on peut déterminer une équation différentielle vérifiée par notre série formelle puis utiliser des méthodes d'analyse pour interpréter une autre expression de notre série formelle

ex 28 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ soit B_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ avec par convention $B_0 = 1$

On montre que $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

Cela implique que $F = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n X^n$ vérifie

$F' - F \exp(X) = 0$

On en déduit $F = \exp(\exp(X) - 1)$

d'où en explicitant les coefficients de F :

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad B_n = \dfrac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{k!}$

ex 29 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ soit C_n le nombre de parenthésages admissibles d'un mot de n lettres alors

$$C_n = \frac{\binom{2n-2}{n-1}}{n}$$

Références pour la leçon 124 :

- **Tauvel, Cours d'algèbre (1ère édition !!!)**
- **Saux-Picart, Cours de calcul formel, algorithmes fondamentaux**
- **Oraux X-ENS algèbre 1 (pour les nombres de Bell et Catalan)**

PARTITIONS D'UN ENTIER EN PARTS FIXÉES

Auteur : Corentin pour la Team Hardy
Références : Oraux X-ENS Analyse 2

Théorème : *Soit $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{N}^{*p}$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $u_n = |\{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{N}^p,\ \sum_{i=1}^p a_i x_i = n\}|$. Alors $u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.*

On considère la fraction rationnelle $F = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 - X^{a_i}} \in \mathbb{C}(X)$. Comme 0 n'est pas pôle de F on peut la développer en série formelle :

$$F = \prod_{i=1}^{p} \sum_{x_i=0}^{+\infty} X^{x_i a_i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{(x_1,...,x_p)\in\mathbb{N}^p,\ \sum_{i=1}^p a_i x_i = n} 1 \Big) X^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n$$

D'autre part, on développe F en éléments simples. 1 est pôle de F d'ordre p. De plus si ω est pôle d'ordre p de F alors comme $\forall i$, $\frac{1}{1-X^{a_i}}$ n'a que des pôles simples ω est nécessairement pôle de $\frac{1}{1-X^{a_i}}$ pour tout i donc $\omega^{a_i} = 1$ pour tout i. Dès lors, puisque $(a_1, ..., a_p)$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, par Bezout il existe $(u_1, ..., u_p) \in \mathbb{Z}^p$ tel que $u_1 a_1 + ... + u_p a_p = 1$ donc $\omega = \omega^{a_1 u_1} ... \omega^{a_p u_p} = 1$.

Ainsi 1 est le seul pôle de F d'ordre p et à nouveau puisque pour tout i $\frac{1}{1-X^{a_i}}$ n'a que des pôles simples, tous les autres pôles de F sont d'ordre inférieur à $p-1$. Notant $\{\omega_1, ..., \omega_N\}$ avec $\omega_1 = 1$ l'ensemble des pôles de F, la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ s'écrit :

$$\exists \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \exists (\alpha_{i,j})_{1\le i\le N, 1\le j\le p-1} \in \mathbb{C}\ :\ F = \frac{\alpha}{(1-X)^p} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p-1} \frac{\alpha_{i,j}}{(\omega_i - X)^j}$$

On redéveloppe alors en série formelle grâce au développement de $\frac{1}{(\omega-X)^j}$ obtenu en dérivant $j-1$ fois celui de $\frac{1}{\omega - X}$:

$$F = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \binom{n+p-1}{n} X^n + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{i,j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+j-1}{n} \omega_i^{-n-j} X^n$$

Identifiant les coefficients il vient

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha \binom{n+p-1}{n} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{p-1} \alpha_{i,j} \binom{n+j-1}{n} \omega_i^{-n-j}$$

Donc, puisque $\binom{n+j}{n} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$,

$$u_n \sim_{n\to\infty} \alpha \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$$

Reste à déterminer α. Pour cela on regarde la fraction rationnelle $G(X) = (1-X)^p F(X)$. 1 n'est pas pôle de G donc on peut considérer $G(1)$. D'une part par le développement en éléments simples on a $G(1) = \alpha$ et d'autre part en reprenant la définition de F et en distribuant $(1-X)^p$ sur chacun des termes du produit on a :

$$G(X) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1-X}{1-X^{a_i}} = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{1 + X + ... + X^{a_i - 1}}$$

Donc $G(1) = \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{a_i}$. On a bien finalement $u_n \sim_{n\to\infty} \frac{1}{a_1 \dots a_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.

Théorème de Molien

Auteur : Corentin pour la Team Hardy
Références : Leichtnam, Exercices corrigés de X-ENS tome Algèbre et Géométrie, p.95 (ou partie D dans l'édition manuscrite) + les explications complémentaires d'Arnaud Stocker à http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~flemonni/agregation/developpements/Molien_Arnaud.pdf

Théorème : *Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{C})$. Soit $\sigma : GL_n(\mathbb{C}) \to GL(\mathbb{C}[X_1, ..., X_n])$ défini par $A \mapsto (P(X) \mapsto P(AX))$ où $X = (X_1, ..., X_n)^t$.*
Pour $k \in \mathbb{N}$ soient $A_k = \{P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ homogène de degré $k\}$ et $A_k^G = \{P \in A_k,\ \forall g \in G,\ \sigma(g)(P) = P\}$. Alors dans $\mathbb{C}[[z]]$ on a :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{det(I-zg)} = \sum_{k\geq 0} dim(A_k^G)z^k$$

Lemme : *Soit ρ une représentation de degré fini de G de caractère χ. On a :*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = dim(\bigcap_{g\in G} Ker(\rho(g)-Id))$$

Démonstration du lemme :
Par décomposition de χ en somme de caractères irréductibles deux à deux orthogonaux on a que $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g) = \langle\chi, 1\rangle$ vaut le nombre de fois qu'apparaît la représentation triviale dans la représentation ρ c'est-à-dire (en écrivant par blocs de représentations irréductibles la représentation ρ) la dimension de $\bigcap_{g\in G} Ker(\rho(g)-Id)$.

On peut aussi introduire $r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$. Comme $\forall h \in G$, $\rho(h)r = r$ on a $r^2 = r$ donc r est une projection sur un certain sous-espace V. Or si $v \in Ker(r - Id)$ alors pour tout $g \in G$, $\rho(g)(v) = \rho(g)(r(v)) = r(v) = v$ donc (puisque l'autre inclusion est claire) $V = \bigcap_{g\in G} Ker(\rho(g)-Id)$, et donc $Tr(r) = dim(V)$ donne le résultat.

Démonstration du théorème :
Comme $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, $\forall P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, $\sigma(AB)(P(X)) = P(ABX) = \sigma(A)(P(BX)) = \sigma(A)(\sigma(B)(P)) = \sigma(A)\circ\sigma(B)(P)$ et que $\sigma(I) = Id$, σ est un morphisme de groupes. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $g \in G$, on a clairement $\sigma(g)(A_k) \subset A_k$ avec A_k de dimension finie et $\sigma(g)$ inversible donc on dispose d'une représentation ρ_k de $GL_n(\mathbb{C})$ dans A_k donnée par $\rho_k(g) = \sigma(g)_{|A_k}$ dont on note χ_k le caractère. ρ_k restreinte à G est aussi une représentation de G donc par le lemme on a pour tout k :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_k(g) = dim(\bigcap_{g\in G} Ker(\rho_k(g)-Id)) = dim(A_k^G)$$

Soit $g \in G$. Par Lagrange, $g^{|G|} = 1$ donc $Y^{|G|} - 1 \in \mathbb{C}[Y]$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples de g qui est donc diagonalisable à valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n \neq 0$.
Ainsi notant $d = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\exists u \in GL_n(\mathbb{C})$, $g = udu^{-1}$ donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\chi_k(g) = Tr(\rho_k(udu^{-1})) = Tr(\rho_k(u)\rho_k(d)\rho_k(u)^{-1}) = Tr(\rho_k(d)) = \chi_k(d)$.
Soit $N_k = \{(i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n,\ i_1 + ... + i_n = k\}$. L'ensemble des $X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$ pour $(i_1, ..., i_n) \in N_k$ forme une base de A_k et on a : pour tout $(i_1, ..., i_n) \in N_k$, $\rho_k(d)(X_1^{i_1}...X_n^{i_n}) = \lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$. Ainsi $\chi_k(g) = \chi_k(d) = \sum_{(i_1,...,i_n)\in N_k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}$.
Par ailleurs :

$$\frac{1}{det(I-zg)} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\lambda_i z} = \prod_{i=1}^{n}\sum_{k\geq 0}\lambda_i^k z^k = \sum_{k\geq 0}\sum_{(i_1,...,i_n)\in N_k}\lambda_1^{i_1}...\lambda_n^{i_n}z^k = \sum_{k\geq 0}\chi_k(g)z^k$$

Finalement :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{det(I-zg)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{k\geq 0}\chi_k(g)z^k = \sum_{k\geq 0}\Big(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_k(g)\Big)z^k = \sum_{k\geq 0} dim(A_k^G)z^k$$