127

Droite projective et birapport.

Contexte : Soit K un corps.

I/ Droite projective sur un corps quelconque

1) Constructions de la droite projective $P^1(K)$ [C-G]

Déf 1 : $P^1(K)$ désigne l'ensemble des droites vectorielles de K^2. C'est donc l'ensemble quotient $(K^2\setminus\{0\})/\sim$ où $\sim$ désigne la relation d'équivalence
$(x,y) \sim (z,t)$ ssi $\exists \lambda \in K^*$ tq $(z,t) = \lambda(x,y)$.

Not 2 : Si $(x,y) \neq (0,0)$, on notera $[x,y]$ la droite qu'il engendre.

Prop 3 : $(x,y) \in K\times K^*$, $[x,y] = [\frac{x}{y}, 1]$.

Notant $\infty = [1,0]$. On a ainsi la décomposition suivante $P^1(K) = K \cup \{\infty\}$
(cf annexe pour une visualisation de cette décomposition ①)

2) Considérations topologiques de la droite projective sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ [Aud]

On munit $P^1(K)$ de la topologie quotient (cf déf 1)

Prop 4 : Les droites projectives réelles ou complexes sont des espaces topologiques compacts et connexes par arcs.

Plus précisément, on montre
- $P^1(\mathbb{R}) \simeq S^1$
- $P^1(\mathbb{C}) \simeq S^2$

où $\simeq$ désigne homéomorphe
(cf annexe pour une visualisation de ces homéomorphismes ② et ③)

Rque 5 : La prop 4 reste vraie pour des espaces projectifs de dimension quelconque > 0.

II/ Action de $PGL_2(K)$ et birapport [Aud] [C-G]

Déf 6 : Une homographie $g : P^1(K) \to P^1(K)$ est une application telle qu'il existe un isomorphisme linéaire $f : K^2 \to K^2$ tel que $p\circ f = g\circ p$ où
$$p : K^2 \to P^1(K), \quad (x,y) \mapsto [x,y]$$

Prop 7 : Les homographies de $P^1(K)$ forment un groupe pour la composition noté $GP(K^2)$.
De plus, $\Phi : \left| \begin{array}{l} GL(K^2) \to GP(K^2) \\ f \mapsto p\circ f \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes surjectif qui se factorise de la manière suivante $GL(K^2)/\{\text{homothéties}\} \simeq GP(K^2)$

Description usuelle : On munit K^2 de la base canonique
Soit $f \in \mathrm{Isom}(K^2)$: $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ avec $ad-bc \neq 0$.
Via l'identification $[x,y] = [z,1]$ quand $y \neq 0$ et $\infty = [1,0]$, toute homographie s'écrit :
$$\boxed{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}}$$
avec convention $\frac{a}{0} = \infty$ si $a \neq 0$ et $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \frac{a}{c}$.

De même
$$GL_2(K) \to PGL_2(K), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right)$$
est un morphisme de groupes qui se factorise de la manière suivante $GL_2(K)/\{\lambda \mathrm{Id},\ \lambda\in K^*\} \simeq PGL_2(K)$

App 8 :
- Toute homographie de $P^1(\mathbb{C})$ a un point fixe.
- Ce résultat est faux sur $P^1(\mathbb{R})$ comme le montre $z \mapsto \frac{z+i}{iz+1}$

<u>App 9</u> : Soient f et g deux homographies ayant chacune deux points fixes distincts. Alors, f et g commutent ssi elles ont les m̂ points fixes.

<u>App 10</u> : Soit $a, b \in \mathbb{P}^1(K)$ ac $a \neq b$.

$\{f \in PGL_2(K),\ f(a) = a \text{ et } f(b) = b\} < PGL_2(K)$

$H \simeq K^*$

<u>Ex 11</u> : $f \in PGL_2(K)$ tq $f(0) = 0$ et $f(\infty) = \infty$ alors $f(z) = az$ pour $a \neq 0$.

<u>Thm 12</u> : L'action de $PGL_2(K)$ est trois fois simplement transitive ie :

Soient (z_1, z_2, z_3) et (z'_1, z'_2, z'_3) deux triplets de points distincts, il existe une unique homographie h tq $h(z_i) = z'_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

<u>Déf 13</u> : Soit (z_1, z_2, z_3, z_4) éléments $\neq$ de $\mathbb{P}^1(K)$. Soit h l'homographie qui envoie z_1 sur ∞, z_2 sur 0 et z_3 sur 1. <u>Le birapport</u> de (z_1, z_2, z_3, z_4) est $[z_1, z_2, z_3, z_4] = h(z_4)$

<u>Ex 14</u> • $[\infty, 0, 1, z_4] = z_4$.

• Sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $[1, 2, 3, 4] = 4/3$

<u>Prop 15</u> : (i) Le birapport est invariant par homographies.

(ii) Deux quadruplets (z_1, z_2, z_3, z_4) et (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) de pts $\neq$ ont le m̂ birapport ssi il existe une homographie h tq $h(z_i) = z'_i$.

(iii) $[z_1, z_2, z_3, z_4] = \dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \cdot \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

<u>Ex 16</u> : • Sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, $[1, 2, 3, 4] = [0, \infty, 2, 3/2]$; $h(z) = \dfrac{z-1}{z-2}$ vérifie $h(z_i) = z'_i$.

<u>Thm 17</u> : Pour que quatre points de $\mathbb{C}$ soient <u>alignés ou cocycliques</u>, il faut et il suffit que leur <u>birapport soit réel</u>.

<u>Ex 18</u> : $[1, i, -1, -i] = -2 \in \mathbb{R}$. Ces 4 points sont sur le cercle unité.

$[1+i, 2(1+i), 3(1+i), 4(1+i)] \in \mathbb{R}$. Les 4 points sont sur la droite d'équation $y = x$.

<u>Thm 19</u> (<u>Formule des six birapports</u>) : Soit huit indéterminées a, b, c, d, p, q, r, s. On a :

$[a, b, c, d] \times [a, r, d, p] \times [a, q, p, c] \times [s, c, q, b] \times [s, p, r, q] \times [s, d, b, r] = 1$

<u>Rque 20</u> : Cette formule s'utilise généralement dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de la façon suivante. Pour montrer que quatre points sont cocycliques ou alignés, on isole leur birapport et on montre que le produit des cinq birapports de la formule précédente est réel pour en déduire que le premier birapport est réel et on utilise le Thm 17.

<u>Ex 21</u> : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4$ quatre cercles-droites de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. On suppose que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_{i+1} = \{A_i, A'_i\}$ et que les A_i sont cocycliques. Alors les A'_i sont cocycliques (cf annexe 4)

<u>Ex 22</u> (<u>Théorème du pivot</u>) : Soit ABC un triangle et A', B' et C' trois points des côtés (BC), (CA) et (AB) distincts des sommets. Alors les cercles circonscrits aux triangles $AB'C'$, $BC'A'$ et $CB'A'$ ont un point commun (cf annexe 5)

<u>Ex 23</u> (<u>Droites de Simson et de Steiner</u>) : Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle p/r aux côtés sont alignés de même que ses projetés orthogonaux sur les côtés.

<u>III</u> / Apparitions (parfois exceptionnelles) des homographies de la droite projective

1) Automorphismes de $K(X)$ [Sp]

Thm 24. $\Phi : GL_2(K) \longrightarrow Aut(K(X))$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \left(F(X) \longmapsto F\left(\frac{-dX+b}{-cX+a}\right)\right)$$

est un morphisme surjectif de groupes.
De plus, $\ker \Phi = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ;\ \lambda \in K^* \right\}$.
D'où $\underline{PGL_2(K) \simeq Aut(K(X))}$

C-ex 25 : $\varphi : K(X) \longrightarrow K(X)$, $X \longmapsto X^2$ $\notin Aut(K(X))$. On peut le voir directement en remarquant que X ne possède pas d'antécédent par φ.

2) $PGL_2(\mathbb{C})$ et analyse complexe [Car]

Thm 26 (admis) (Théorème de représentation conforme de Riemann). Tout domaine simplement connexe du plan distinct de $\mathbb{C}$ tout entier est biholomorphe à $\mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

ex 27 : • Soit $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C};\ (z) > 0\}$.
Alors $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est une homographie qui envoie $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{D}$.
• Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ Re(z) > 0\}$.
Alors $g(z) = \frac{z-1}{z+1}$ qui envoie Ω sur $\mathcal{D}$.

Thm 27 (Quelques groupes d'automorphismes classiques)
(i) Les automorphismes de $\mathbb{C}$ sont donnés par $z \longmapsto az+b$ avec $a \neq 0$
(ii) Les automorphismes de $\mathcal{D}$ sont donnés par les transformations de Moebius ie $z \longmapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ ac $|a|^2 - |b|^2 = 1$.
(iii) Les automorphismes de $\mathcal{H}$ sont les homographies de la forme $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ ac $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $ad - bc > 0$

3) Isomorphismes exceptionnels [C-G]

Contexte : q puissance d'un nombre premier et $\mathbb{F}_q$ le corps fini à q éléments.

Prop 28. (i) $|P^1(\mathbb{F}_q)| = 1+q$
(ii) $|GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$
(iii) $|PGL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)\frac{(q^2-q)}{(q-1)} = (q+1)(q^2-q)$.
(iv) $|SL_2(\mathbb{F}_q)| = |PGL_2(\mathbb{F}_q)|$.

Thm 29 (Isomorphismes exceptionnels)
(i) $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$
(ii) $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{A}_4$, $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$
(iii) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathfrak{A}_5$.
(iv) $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{A}_5$, $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$.

Références

• [Aud], Michèle Audin, Géométrie
• [C-G], Caldero-Germoni, H2G2
• [Car], Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes
• [Sp], Spingler, L3 Algèbre.

Annexe

Figure 1

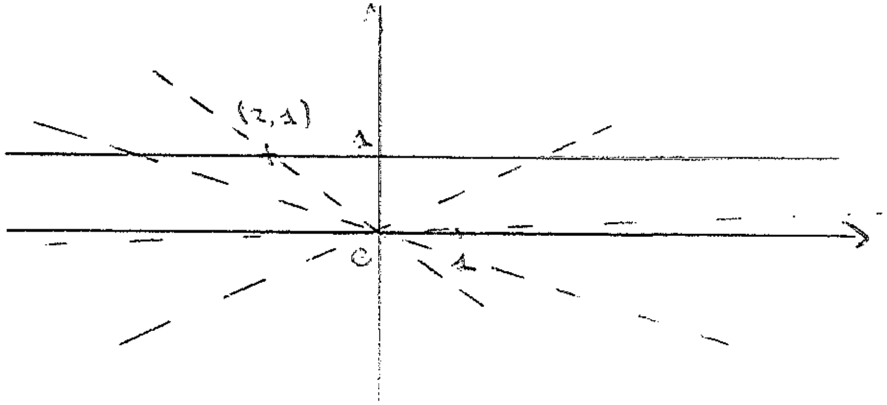

Figure 2

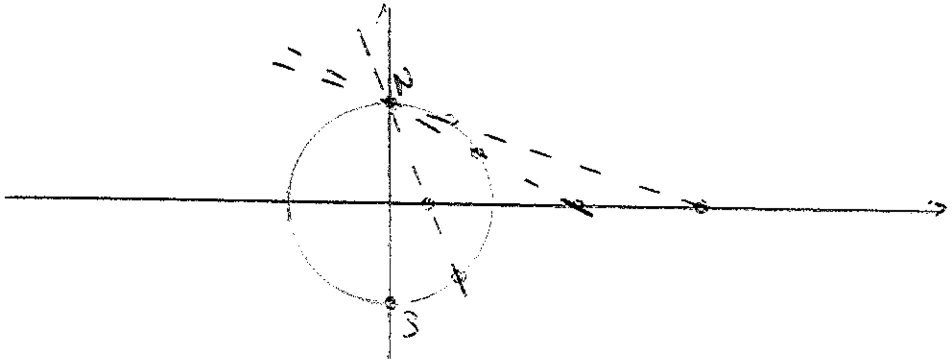

Figure 3

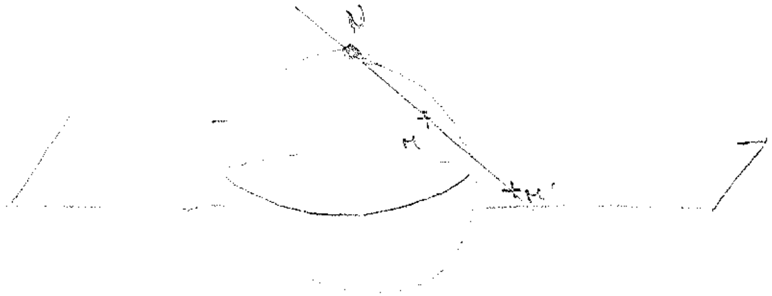

Figure 4

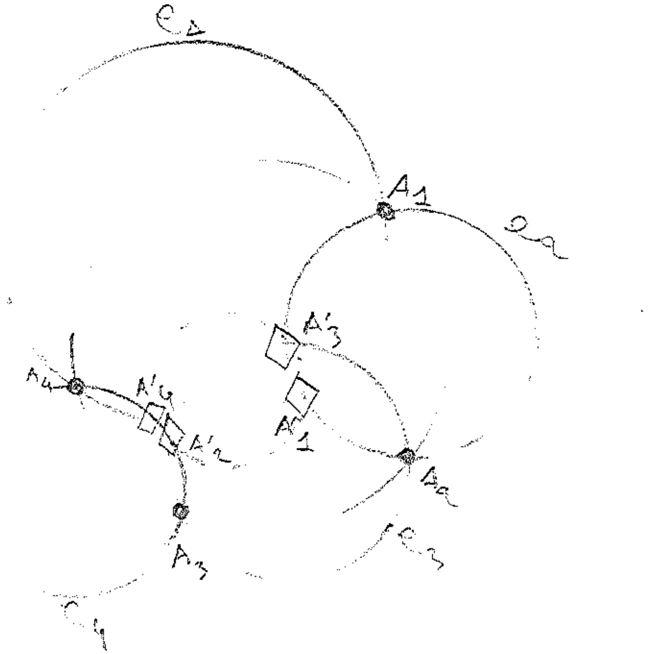

Figure 5