140 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.

Dans toute la suite, K désigne un corps commutatif.
On rappelle que $K[X]$ est alors principal

I- Généralités [LFA] [RDO]

① Construction de $K(X)$, premières propriétés

<u>Déf 1:</u> On appelle <u>corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur K</u>, et on note <u>$K(X)$</u>, le corps des fractions de $K[X]$. Plus précisément, $K(X)$ est l'ensemble quotient de $K[X] \times (K[X]\setminus\{0\})$ par la relation d'équivalence $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2) \iff A_1 B_2 = A_2 B_1$.
On note $\frac{A}{B}$ la classe d'équivalence du couple (A,B) pour $\sim$.

<u>Rem 2:</u> * $K(X)$ est muni d'une structure de K-algèbre via les lois

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD+BC}{BD} \quad ; \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\lambda \frac{A}{B} = \frac{\lambda A}{B} \quad , \lambda \in K,\ A, C \in K[X],\ B, D \in K[X]\setminus\{0\}$$

* $\begin{array}{rcl} K[X] & \hookrightarrow & K(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array}$ est un morphisme injectif d'algèbres

* Si K est le corps de fractions d'un anneau intègre A, alors $K(X) = A(X)$

<u>Prop-déf 3:</u> [Forme irréductible]
Pour toute fraction rationnelle F de $K(X)$, il existe un représentant $\frac{A}{B}$ tel que A et B soient premiers entre eux.
Le représentant de F est appelé <u>forme irréductible de F</u>; il est unique aux constantes multiplicatives non nulles près :
Si $\frac{A'}{B'}$ en est un autre, $\exists a \in K\setminus\{0\}$, $A' = aA$, $B' = aB$

<u>Prop-déf 4:</u> On rappelle que le degré du polynôme nul de $K[X]$ est $-\infty$.
On adopte la convention $(-\infty) + n = n + (-\infty) = -\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Soit $F \in K(X)$. Alors l'élément $\deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ est indépendant du choix du représentant $\frac{A}{B}$ de F, on l'appelle <u>degré de F</u>, noté $\deg(F)$.

<u>Prop 5:</u> Soient $F_1, F_2 \in K(X)$. Alors :

i) $\deg(F_1 + F_2) \leq \sup(\deg(F_1), \deg(F_2))$

ii) $\deg(F_1 \times F_2) = \deg(F_1) + \deg(F_2)$

<u>Cor 6:</u> $K(X)$ n'est jamais algébriquement clos [TAU]

<u>Thm 7:</u> Les automorphismes de la K-algèbre $K(X)$ sont les applications [FGN 1]

$$\Phi_{a,b,c,d} : F \in K(X) \longmapsto F\left(\frac{aX+b}{cX+d}\right) \quad , a,b,c,d \in K \quad , ad - bc \neq 0.$$ DVPT

En outre, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K) \longmapsto \Phi_{a,b,c,d}$ est un morphisme de groupes de noyau le sous-groupe des matrices scalaires non nulles.

② Racines et pôles

Soit $F \in K(X)$ de forme irréductible $\frac{A}{B}$.

<u>Déf 8:</u> Toute racine d'ordre k du polynôme non nul B est dite <u>pôle</u> d'ordre k de F. Toute racine d'ordre k de A est dite <u>racine</u> d'ordre k de F.

<u>Rem 9:</u> - Aucun élément n'est à la fois racine et pôle de F.
- L'ensemble des pôles de F est fini

<u>Déf 10:</u> On note Δ_F le complémentaire dans K de l'ensemble des pôles de F.
On appelle <u>fonction rationnelle</u> associée à F dans K l'application

$$\tilde{F} : \begin{array}{rcl} \Delta_F & \longrightarrow & K \\ x & \longmapsto & \frac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \end{array}$$

<u>Prop 11.</u> On suppose que K est infini et que F_1 et F_2 sont deux éléments de $K(X)$ tels que : $\forall x \in \Delta_{F_1} \cap \Delta_{F_2}$, $\tilde{F}_1(x) = \tilde{F}_2(x)$.
Alors $F_1 = F_2$ dans $K(X)$.

<u>App 12:</u> Si K est de caractéristique nulle, alors, avec $\mathbb{Q} \subset K$,

$$\tilde{F}_1(x) = \tilde{F}_2(x)\ \forall x \in \mathbb{Q} \cap \Delta_{F_1} \cap \Delta_{F_2} \implies (F_1 = F_2 \text{ dans } K(X))$$

③ Dérivation

Prop-déf 13 : Soit $F \in k(X)$. Alors la fraction rationnelle représentée par $\frac{BA'-AB'}{B^2}$ est indépendante du choix du représentant $\frac{A}{B}$ de F.
On l'appelle fraction rationnelle dérivée de F, et on la note F'.

Prop 14 : Pour tout $(F,G) \in k(X)^2$ et pour tout $\lambda \in k$, on a :
- $(F+G)' = F'+G'$
- $(\lambda F)' = \lambda F'$
- $(F\cdot G)' = F'G + FG'$

Prop 15 : Si k est de caractéristique nulle, alors $F' = 0_{k(X)}$ si et seulement si $F \in k$.

Contre-ex 16 : On suppose k de caractéristique $p>0$.
Alors $F := \frac{1}{X^p} \neq 0$ mais $F' = 0_{k(X)}$.

Rem 17 : Soit $F \in k(X)$. Alors $(F' = F) \iff (F = 0_{k(X)})$

II - Décomposition en éléments simples

Soit $F \in k(X)$ de forme irréductible $F = \frac{P}{Q}$.
On écrit la décomposition de Q en facteurs irréductibles $Q = \prod_{i=1}^{r} Q_i^{\lambda_i}$, $\lambda_i \geq 1$

① Partie entière, partie polaire

Prop-déf 18 : Il existe un et un seul polynôme $E \in k[X]$ tel que $\deg(F-E) < 0$. On dit que E est la partie entière de F.

Rem 19 : [Autre interprétation de la partie entière]
Dans le k-espace vectoriel $k(X)$, $k[X]$ et $\mathcal{F}_- := \{$ fractions rationnelles de degré strictement négatif $\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Thm 20 : [décomposition en éléments simples]
F s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme :
$$F = E + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \mathcal{P}_i}_{\text{partie polaire de } F}$$
où : $\begin{cases} E \in k[X] \text{ est la partie entière de } F \\ \mathcal{P}_i = \sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{P_{i,j}}{(Q_i)^j} \quad \text{avec } \deg(P_{i,j}) < \deg(Q_i), \ \forall i,j \end{cases}$

App 21 : * Si k est algébriquement clos, la décomposition en éléments simples de F est de la forme : $F = E + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\lambda_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}$
où $a_1, \dots, a_r$ sont les racines distinctes de Q, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ leurs ordres de multiplicité et $\lambda_{ij} \in k$.
* Si $k = \mathbb{R}$: $F = E + \sum_{i=1}^{r_1}\left(\sum_{j=1}^{\mu(i)} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}\right) + \sum_{l=1}^{r_2}\left(\sum_{\ell=1}^{\nu(l)} \frac{R_{l,\ell}}{(X^2+\lambda_l X+\beta_l)^\ell}\right)$

avec $\begin{cases} \mu(i), \nu(l) > 0 \\ R_{l,\ell} \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré 1 au plus} \\ \text{les } X^2+\lambda_l X+\beta_l \text{ irréductibles dans } \mathbb{R}[X], \text{ deux à deux distincts} \end{cases}$

Cor 22 : [Théorème de Gauss-Lucas] [TAU]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant. Alors toute racine de P' est contenue dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.

Ex 23 : Dans $\mathbb{C}(X)$, $\frac{1}{X^4-1} = \frac{1/4}{X-1} + \frac{-1/4}{X+1} + \frac{i/4}{X-i} + \frac{-i/4}{X+i}$

② Résidus [TAU]

Déf 24 : On suppose que F admet un pôle a d'ordre $\lambda \geq 1$.
Soit $\mathcal{P}_a = \frac{\lambda_1}{X-a} + \frac{\lambda_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_\lambda}{(X-a)^\lambda}$ la partie polaire de F relative au pôle a. λ_1 est appelé résidu de F en a, noté $\lambda_1 = \mathrm{Res}(F,a)$.

Prop 25 : On suppose $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

(i) Si $\deg(F) < -1$, la somme des résidus aux divers pôles de F est nulle

(ii) Si car $\mathbb{K} = 0$, l'image de $\begin{array}{rcl} \mathbb{K}(X) & \to & \mathbb{K}(X) \\ F & \mapsto & F' \end{array}$ est l'ensemble des fractions rationnelles dont tous les résidus sont nulles.

[TAU] **Prop 26 :** On suppose que $F = \dfrac{A}{(X-a)^n C}$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{K} \\ A, C \in \mathbb{K}[X] \text{ étrangers} \\ A(a) \text{ et } C(a) \neq 0 \end{cases}$

On pose $\tilde{A}(X) = A(X+a)$ et $\tilde{C}(X) = C(X+a)$.

Si la division de $\tilde{A}$ par $\tilde{C}$ suivant les puissances croissantes à l'ordre $n-1$ s'écrit :

$$\tilde{A}(X) = (\lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}) \tilde{C}(X) + X^n A(X)$$

alors la partie polaire de F relativement à a est :

$$S_a = \frac{\lambda_{n-1}}{X-a} + \frac{\lambda_{n-2}}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\lambda_0}{(X-a)^n}$$

Cor 27 : On conserve les notations de la prop 26 et on note $B = (X-a)^n C$

(i) Si $n = 1$, on a $\operatorname{Res}(F, a) = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$

(ii) Si car $\mathbb{K} = 0$, alors $\lambda_0 = n! \dfrac{A(a)}{B^{(n)}(a)}$

Ex 28 : Pour tout pôle a de $G = \dfrac{1}{1+X^6}$, on a $\operatorname{Res}(G, a) = \dfrac{1}{6a^5}$

III - Applications

① Calculs d'intégrale

Ex 29 : $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{-1/3}{x+1}\,dx + \int \frac{1/3}{x-2}\,dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$

[TAU] **Thm 30 :** [Théorème des résidus]

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$, sans pôle réel et telle que $\deg(F) \leq -2$. Notons $\xi_1, \dots, \xi_s$ les pôles de F de partie imaginaire strictement positive. Alors :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\,dt = 2i\pi \sum_{n=1}^{s} \operatorname{Res}(F, \xi_n)$$

Ex 31 : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6} = -\frac{i\pi}{6}\left(e^{i\pi/6} + e^{i\pi/2} + e^{i5\pi/6}\right) = \frac{\pi}{3}$

② Intégration des fractions rationnelles

Déf 32 : On appelle *primitive* de $F \in \mathbb{K}(X)$ toute fraction rationnelle (de $\mathbb{K}(X)$) dont la dérivée est F.

Rem 33 : D'après la prop 15, si car $\mathbb{K} = 0$ et si F admet des primitives, alors deux primitives de F diffèrent d'un polynôme constant.

Thm 34 : Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors :

(F admet une primitive dans $\mathbb{C}(X)$) $\Leftrightarrow$ (Les résidus relatifs à tous les pôles de F sont nuls)

Ex 35 : $F = \dfrac{X^3 - 3X^2 - 1}{(X-1)^3}$ admet pour primitive $G = X + \dfrac{3}{X-1} + \dfrac{3}{2(X-1)^2}$

③ Application aux séries formelles

Thm 36 : Soient $S = \sum_{m \geq 0} a_m X^m$ et $T = \sum_{m \geq 0} b_m X^m$ deux séries formelles avec $b_0 \neq 0$. Pour tout entier n, il existe un polynôme Q_n, et une série formelle R_n, définis de façon unique, tels que :

$$S = T Q_n + X^{n+1} R_n \quad , \quad \deg(Q_n) \leq n$$

Cor 37 : $S = \sum_{m \geq 0} a_m X^m$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$

App 38 : Toute fraction rationnelle qui n'admet pas 0 pour pôle peut être développée en série formelle.

Ex 39 : On suppose car $\mathbb{K} = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Alors la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{1}{(1-X)^n}$ admet le développement en série formelle $\displaystyle\sum_{p \geq 0} \binom{n+p-1}{n-1} X^p$

Thm 40 : Soient $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux dans leur ensemble.

$\forall n \geq 1$, $u_n := \operatorname{card}\left(\left\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k \,/\, \sum_{i=1}^{k} a_i x_i = n\right\}\right)$. $u_n \sim \dfrac{1}{a_1 \cdots a_k} \dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!}$ DVPT [FGN2]