élémentaires - localisation des racines dans les cas réels et complexes.

Cadre : $\mathbb{K}$ corps commutatif.

1. Généralités

1.1. Racines d'un polynôme [GOU] p59-60

Def 1 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $a \in \mathbb{K}$ est racine de P si $P(a) = 0$.

Prop 2 : Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors : a est une racine de $P \Leftrightarrow X - a \mid P$.

Def 3 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $h \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est une racine d'ordre h de P si $(X-a)^h \mid P$ et $(X-a)^{h+1} \nmid P$.

Thm 4 : Si $car(\mathbb{K}) \neq 0$ et si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, alors $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre h de P, si et seulement si,
(i) $\forall 0 \leq i \leq h-1$, $P^{(i)}(a) = 0$
(ii) $P^{(h)}(a) \neq 0$.

Contre-ex 5 : dans le cas $car(\mathbb{K}) = 0$:
$P = X^3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$, $a = \dot{0}$ est racine d'ordre 3 et pourtant $P^{(3)}(a) = \dot{0}$.

Prop 6 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{K}$ des racines de P d'ordre $h_1, \dots, h_r$ ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$). Alors,
$\exists Q \in \mathbb{K}[X] \,/\, P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{h_i} Q(X)$ et $\forall 1 \leq i \leq r, Q(a_i) \neq 0$.

Csqce 7 : si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n, alors P a au plus n racines (comptées avec multiplicité).

Application 8 : si $\mathbb{K}$ est fini, $(\mathbb{K}^\times, \times)$ est cyclique.

Contre-ex 9 : dans le cas d'un anneau
$P = 4X \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$ a 3 racines distinctes : $\dot{0}$, $\dot{2}$ et $\dot{4}$.

Thm 10 : Soit $P \in \mathbb{K}[X] \,/\, \forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$. Alors, si $\mathbb{K}$ est infini, on a $P = 0$.

Contre-ex 11 : dans le cas d'un corps fini $\mathbb{K} = \{a_1, \dots, a_n\}$, $P(X) = (X-a_1) \dots (X-a_n)$.
P est non nul et pourtant, $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$.

Application 12 : . si $\mathbb{K}$ est infini, il y a bijection entre $\mathbb{K}[X]$ et l'ensemble des fonctions polynômes de $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$
. unicité des polynômes de Tchebychev de 1ère espèce : $\forall n \geq 1, \exists! T_n \in \mathbb{R}[X] \,/\, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Def 13 : $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si $\deg(P) \geq 1$ et si les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes non nulles et les polynômes associés à P. [GOU] p55

Prop 14 : (i) Tout polynôme de degré 1 est irréductible. [GOZ] p9
(ii) Tout polynôme irréductible de degré > 1 n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$.

Rmq 15 : La réciproque de (ii) est vraie ssi $\deg(P) \in \{2, 3\}$
$P(X) = (X^2+1)^2$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ mais est réductible dans $\mathbb{R}[X]$.

1.2. Existence des racines

Def 16. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Une extension $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ est appelée un corps de rupture de P sur $\mathbb{K}$ si il $\exists \alpha \in \mathbb{L} \,/\, \mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$ et $P(\alpha) = 0$. [PER] p70

Thm 17 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Il existe un corps de rupture de P sur $\mathbb{K}$, unique à isomorphisme près. [PER] p70

Exples 18 : . $\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ [PER] p70
. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}[X]/(X^3-2)$ et [GOZ] p58
. $\mathbb{F}_4 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]/(X^2+X+1)$

Def 19 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n. On appelle corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$, une extension $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$, telle que : [PER] p71
(i) dans $\mathbb{L}[X]$, P est produit de facteurs de degré 1.
(ii) $\mathbb{L}$ est minimal pour cette propriété.

Thm 20 : Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe un corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$, unique à isomorphisme près. On le note $D_{\mathbb{K}}(P)$.

Exemples 21 : . Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $P(X) = X^3 - 2$, $D_{\mathbb{K}}(P) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ [PER] p72
. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $P(X) = X^4 - 2$, $D_{\mathbb{K}}(P) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$

Rappel : Pour les polynômes de degré au plus 4, on a des formules explicites pour exprimer les racines d'un polynôme. Cependant, à partir du degré 5, par les résultats d'Abel et Galois, on en a plus.

1.3. Fonctions symétriques élémentaires

Cadre : $(A, +, \cdot)$ désigne un anneau.

Def 22 : $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ est dit symétrique, ssi, [RDO]
$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$.

Do] **Def 23**. Dans $A[X_1,\dots,X_n]$, les n polynômes Σ_p, $1\leq p\leq n$, définis par $\Sigma_p=\sum_{1\leq i_1<\dots<i_p\leq n} X_{i_1}\cdots X_{i_p}$
sont symétriques et portent le nom de polynômes symétriques élémentaires.

Do] **Def 24**: Soit $P=\sum_{i\in\mathbb{N}^n} a_i X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\in A[X_1,\dots,X_n]$.
On définit le poids $\pi(P)$, de P, par :

- $\pi(P)=-\infty$ si $P=0$.
- $\pi(P)=\max_{\substack{i\in\mathbb{N}^n\\ a_i\neq 0}}\left\{\sum_{k=1}^{n} k i_k\right\}$

Do] **Thm 26**: (structure des polynômes symétriques)
Soit P un polynôme symétrique de $A[X_1,\dots,X_n]$ de degré p. Il existe un unique polynôme Q de $A[Y_1,\dots,Y_n]$, de poids p, tel que $P(X_1,\dots,X_n)=Q(\Sigma_1,\dots,\Sigma_n)$

Exple 27: dans $A[X_1,X_2,X_3]$, $P=\sum_{i\neq j} X_i^2X_j$ s'écrit
$P=\Sigma_1\Sigma_2-3\Sigma_3$.

Remarque 28: La preuve du théorème de structure donne un algorithme pour déterminer Q.

Def 29: Soit $n\geq 2$. On appelle sommes de Newton, les polynômes $S_p=\sum_{i=1}^{n} X_i^p$.

GOU] 180 ou [ENS1] 209 **Prop 30**: Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, S_p est un polynôme symétrique. De plus, on a les relations suivantes :

(i) $\forall 1\leq k\leq n-1$, $0=S_k-\Sigma_1S_{k-1}+\dots+(-1)^{k-1}\Sigma_{k-1}S_1+(-1)^k k\Sigma_k$

(ii) $\forall p\in\mathbb{N}$, $0=S_{p+n}-\Sigma_1S_{p+n-1}+\dots+(-1)^{n-1}\Sigma_{n-1}S_{p+1}+(-1)^n\Sigma_nS_p$

Csqce 31: Tout polynôme symétrique de $A[X_1,\dots,X_n]$ peut s'exprimer comme un polynôme en les sommes de Newton, à condition que $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\in A^\times$.

GOU] p78 **Application 32**: (relations coefficients / racines)
Si $P=X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_n\in\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et si $u_1,\dots,u_n$ sont ses racines, alors
$$\forall 1\leq i\leq n,\ (-1)^i a_i=\Sigma_i(u_1,\dots,u_n).$$

GOU] p78 **Application 33**: Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ unitaire et $u_1,\dots,u_n$ ses racines. Alors, pour tout $F\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ symétrique,
$$F(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{Z}.$$

Application 34: Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(A^k)=0$. [XENS2] p271
Alors, A est nilpotente.

Application 35: Théorème de d'Alembert-Gauss [S4M] p53
Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

2. Localisation des racines

2.1. Motivation : la méthode de Newton

Thm 36: Méthode de Newton pour les polynômes [C-F]
Soient $\xi_1<\xi_2<\dots<\xi_r$ des réels ($r\geq 2$) et $m_1,\dots,m_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit $P=\prod_{k=1}^{r}(X-\xi_k)^{m_k}$
Soit $x_0>\xi_r$, et $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n-\frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$
Alors, (x_n) est strictement décroissante $\lim_{n\to+\infty}x_n=\xi_r$.

Rmq 37: Convergence locale de la méthode !

2.2. Le cas réel

Prop 38: (règle de Newton) [MIG] p200
Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ et $L\in\mathbb{R}$ tel que $\forall 0\leq i\leq n$, $P^{(i)}(L)\geq 0$.
Alors, toute racine réelle x de P vérifie $x\leq L$.

Prop 39: (règle de Lagrange et MacLaurin) [MIG] p200
Soit $P(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_n\in\mathbb{R}[X]$ avec $a_i\geq 0$ pour $i\in[\![1,m-1]\!]$, et soit $A=\max\{-a_m,\dots,-a_n,0\}$
Alors, toute racine réelle x de P vérifie
$$x<1+A^{1/m}$$

Prop 40: (règle de Descartes) [MIG] p201
Soit $P(x)=X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_mX^{n-m}-a_{m+1}X^{n-m-1}-\dots a_n$ avec $a_i\geq 0$ pour $1\leq i\leq n$.
Si $c\in\mathbb{R}_+$ est tel que $P(c)\geq 0$, alors toute racine réelle x du polynôme vérifie $x\leq c$.

Prop 41: (règle de Cauchy) [MIG] p201
Soient $a_{m_1},a_{m_2},\dots$ avec $m_1>m_2>\dots$ les coefficients strictement négatifs d'un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$,
$P(X)=X^n+a_1X^{n-1}+\dots+a_n$, et soit k le nombre de ses coefficients négatifs.
Alors, toute racine réelle x du polynôme P vérifie
$$x\leq\max\left\{(k|a_{m_1}|)^{1/m_1},(k|a_{m_2}|)^{1/m_2},\dots\right\}$$

Exemple 42: Soit $P(x)=x^6-12x^4-2x^3+37x^2+10x-10$ [MIG] p202
Les différentes règles donnent les bornes suivantes :
- Newton : $\sqrt{8}$
- Cauchy : 6
- Lagrange-McL : $1+\sqrt{12}$

2.3. Le cas complexe

A] 4 **Théorème 43** : (Eneström-Kakeya)
Soit $P(X)=a_0X^{n-1}+\dots+a_{n-1}$ avec tous les $a_i>0$. Alors, pour toute racine ξ de P, on a :

NS1] 33
$$\min_{1\leq i\leq n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}\leq|\xi|\leq\max_{1\leq i\leq n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}$$

PRA] 14 **Théorème 44** : (Ostrovsky)
Avec les mêmes notations que pour Eneström-Kakeya. On suppose que pour $k=k_1,\dots,k_m$, $\frac{a_k}{a_{k-1}}<\gamma$. Alors, si $\mathrm{pgcd}(n,k_1,\dots,k_m)=1$, on a $|\xi|<\gamma$.

2.4. Racines d'un polynôme dérivé

ENS1] 229 **Théorème 45** : (Gauss-Lucas)
Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant. Alors, les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

ENS1] 229 **Applications 46** : • Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ non constant, Δ une droite du plan complexe, H_1 et H_2 les deux demi-plans ouverts limités par Δ. On suppose que P' a une racine dans H_1. Alors, $P(H_1)=\mathbb{C}$.

ENS1] 231 • Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que P a 2 racines réelles distinctes et $P''\mid P$. Alors, toutes les racines de P sont réelles et simples.

PRA] 14 **Théorème 47** : (Van der Berg) DÉVELOPPEMENT.
Soient M_1, M_2 et M_3 trois points non alignés de $\mathbb{C}$, d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3, et $P(X)=(X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)$. Alors, les racines de P' sont les foyers d'une ellipse, tangente aux trois côtés du triangle $M_1M_2M_3$ en leurs milieux.

3. Variation et comptage des racines

3.1. Continuité et régularité

F-G] 232 **Théorème 48** : (continuité des racines de polynôme)
Soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{C}_n[X]$ et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}=(\alpha_k\prod_{i=1}^{n}(X-x_{i,k}))_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $P_k\xrightarrow[k\to\infty]{}P$. Soit $z\in\mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité p. Alors, $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_0\in\mathbb{N}$, $\forall k\geq k_0$, il y a au moins p racines $x_{i,k}$ vérifiant $|z-x_{i,k}|\leq\varepsilon$.

OA] p11 **Théorème 49** : (régularité d'une racine simple de polynôme)
Soient $P_0\in\mathbb{R}_n[X]$ et x_0 une racine simple de P. Alors la racine dépend localement du polynôme de manière $\mathcal{C}^\infty$.

Application 50 : En particulier, on a un résultat de régularité des valeurs propres simples d'une matrice.

3.2 Comptage par l'analyse réelle

MiG] 203 **Def 51** : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a<b\in\mathbb{R}$. On dit que $P_0=P,P_1,\dots,P_s$ est une suite de Sturm pour P sur $[a,b]$ lorsque :

(i) $P(a)P(b)\neq0$ (ii) P_s ne s'annule pas sur $[a,b]$

(iii) si $c\in]a,b[$ et $P(c)=0$, alors $P(x)P_1(x)$ est du signe de $x-c$ au voisinage de c.

(iv) si $c\in]a,b[$ et $P_j(c)=0$, pour $j\in]0,s[$, alors $P_{j-1}(c)P_{j+1}(c)<0$

Def 52 : Soit $x\in]a,b[$. On définit le "nombre de variations de signe de la suite au point x", noté $V(x)$, et défini par $V(x)=\mathrm{Card}\{(i,j),\ 0\leq i<j\leq s,\ P_j(x)P_i(x)<0$ et $P_k(x)=0$, si $i<k<j\}$ [MiG] p203

Thm 53 : (Sturm)
Soient $P\in\mathbb{R}[X]$ et $a<b\in\mathbb{R}$. Si $P_0,\dots,P_s$ est une suite de Sturm pour P sur $[a,b]$, alors le nombre de zéros distincts de P sur $[a,b]$ est égal à la quantité $V(a)-V(b)$. [MiG] p204

Thm 54 : (Budan-Fourier)
Soient $P\in\mathbb{R}[X]$, $a<b\in\mathbb{R}$ tels que $P(a)P(b)\neq0$. Soit $V(x)$ le nbre de changements de signe dans la suite $P(x)$, $P'(x),\dots,P^{(n)}(x)$. Alors, le nombre de zéros de P dans $[a,b]$, comptés avec multiplicité, est de la forme :
$$V(a)-V(b)-2m,\quad m\in\mathbb{N}.$$ [MiG] p206

Exple 55 : • $P(X)=X^6-X^4+2X^2-3X+1$ a une seule racine réelle positive [MiG] p208
• $P(X)=X^5-5X^4+15X^3-X^2+3X-7$ a 1 racine dans $[0,1]$, 0 dans $]-\infty,0[$, et 0 dans $]1,+\infty[$. p211

3.3. Comptage par l'analyse complexe

Thm 56 : (Résidus)
Soit f holomorphe sur $D=U\setminus\{a_1,\dots,a_r\}$ et γ un chemin continu fermé dans γ tel que $I(\gamma,z)=0$, $\forall z\notin U$. Alors : [OA] p67
$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz=\sum_{k=1}^{r}I(\gamma,a_k)\,\mathrm{Res}(f,a_k).$$

Thm 57 : (Rouché)
Soient f et $g\in\mathbb{C}[X]$, γ un chemin fermé de $\mathbb{C}$ sans pt double. Si $\forall z\in\gamma$, $|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$, alors f et g ont le même nombre de zéros à l'intérieur de γ. [PRA] p1

Exemple 58 : z^8-5z^3+z-2 a 3 zéros dans $D(0,1)$. [OA] p67

3.4. Dans un corps fini et des polynômes à plusieurs variables

Thm 59 : (Chevalley-Warning) DÉVELOPPEMENT
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique p, de cardinal q. Soient $P_1,\dots,P_r\in\mathbb{K}[X_1,\dots X_n]$ / $\sum_{i=1}^{r}\deg(P_i)<n$ et V l'ensemble de leurs zéros communs dans $\mathbb{K}^n$.
On a $\mathrm{Card}(V)\equiv0\ [p]$.

On peut aussi parler de :

- Disques de Gershgorin (Yger-Weil, Maths Appli L3 (Pearson) p48)
- Résultant et discriminant (Szpirglas, L3 Algèbre p564-569)
- Algorithmes de recherches de valeurs propres
- Problème de Routh-Urwitz (dans Prasolov, Polynomials, au début...)
- lien entre formes quadratiques et comptage de racines

Autres Développements possibles :

- Théorème de structure des polynômes symétriques
- Méthode de Newton pour les polynômes (Chambert-Loir, Fermigier)
- Formes quadratiques et comptage de racines (Gantmacher)
- Théorème de Kronecker (Szpirglas)

Références :

[GOU] Gourdon, Algèbre.
[GOZ] Gozard, Théorie de Galois
[F-G] Francinou-Gianella, Exercices de Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre 1.
[OA] Objectif Agrégation
[SAM] Samuel, Théorie des nombres
[RDO] Ramis-Deschamps-Odoux, Cours de Mathématiques Spéciales, Algèbre 1.
[XENS 1] et [XENS 2], Francinou-Gianella-Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 1 et 2.
[PER] Perrin, Cours d'algèbre.
[SZP] Szpirglas, L3 Algèbre.
[C-F] Chambert-Loir, Fermigier, Analyse pour l'agrégation.
[MIG] Mignotte, Mathématiques pour le calcul formel
[PRA] Prasolov, Polynomials