144

Racines d'un polynôme, fonctions symétriques élémentaires, exemples et applications

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps, $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme, $x \in \mathbb{K}$.

I. Racines d'un polynôme et adjonction de racines

1) Racines et multiplicité :

def 1 : x racine de P ssi $P(x)=0$

ex 2 : $1, j$ et j^2 sont racines de X^3-1 sur $\mathbb{C}$, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

prop 3 : x racine de P ssi $X-x \mid P$ dans $\mathbb{K}[X]$.

def 4 : x racine de P. La multiplicité de x est le plus grand entier r tel que $(X-x)^r$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

prop 5 : si car $\mathbb{K}=0$, x racine de P avec multiplicité r ssi $P(x)=P'(x)=\dots=P^{(r-1)}(x)=0$ et $P^{(r)}(x)\neq 0$.

rem 6 : En caractéristique quelconque, $r \geq 2 \iff P(x)=P'(x)=0$.

c-ex 7 : $\mathbb{K}=\mathbb{F}_3$, $P=(X^3-1)(X^3-2)$ possède 1 et 2 comme racines de multiplicité 3. Pourtant $P^{(3)}(1)=P^{(3)}(2)=0$.

prop 8 : P admet au plus $\deg P$ racines comptées avec multiplicité dans $\mathbb{K}$. (si $P\neq 0$).

def 9 : P est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il est produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{K}[X]$.

rem 10 : équivalent à "P admet avec multiplicité $\deg P$ racines sur $\mathbb{K}$".

prop 11 : Si car$(\mathbb{K})=0$, seul le polynôme nul s'annule sur $\mathbb{K}$ tout entier.

c-ex 12 : $\mathbb{K}$ fini, $P=\prod_{\lambda\in\mathbb{K}}(X-\lambda)$ s'annule sur tout $\mathbb{K}$.

2) Irréductibilité :

def 13 : P irréductible sur $\mathbb{K}$ s'il n'est pas constant et si : $(P=RQ,\ R,Q\in\mathbb{K}[X]) \Longrightarrow R$ ou Q constant.

ex 14 : Les polynômes de degré 1 sont irréductibles sur $\mathbb{C}$.

prop 15 : P de degré ≥ 2 : Si P irréductible sur $\mathbb{K}$, il n'admet pas de racines sur $\mathbb{K}$.

rem 16 : réciproque vraie si $\deg P = 2$ ou $\deg P = 3$.

c-ex 17 : $P=(X^2+1)^2$ n'admet pas de racines sur $\mathbb{Q}$ mais réductible.

3) Corps de rupture

def 18 : P irréductible sur $\mathbb{K}$. On appelle corps de rupture de P sur $\mathbb{K}$ toute extension de corps L de $\mathbb{K}$ telle que : $\begin{cases} L=\mathbb{K}(\alpha) \text{ avec } \alpha\in L \\ P(\alpha)=0 \end{cases}$

prop 19 : P irréductible : $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps de rupture de P sur $\mathbb{K}$.

th 20 : ce corps de rupture est unique à isomorphisme près

ex 21 : $\mathbb{C}$: corps de rupture de X^2+1 sur $\mathbb{R}$.

prop 22 : $\deg P=n$, P irréductible sur $\mathbb{K}$ ssi P n'a pas de racines dans les extensions L de $\mathbb{K}$ vérifiant $[L:\mathbb{K}]\leq \frac{n}{2}$

app 23 : X^4+X+1 est irréductible sur $\mathbb{F}_2$.

4) Corps de décomposition

def 24 : L corps de décomposition de P sur $\mathbb{K}$ si P est scindé dans L, et L engendré par $\mathbb{K}$ et les racines de P.

th 25 : Il existe un unique corps de décomposition à isomorphisme près.

ex 26 : $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ corps de décomposition de X^2-2 sur $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ corps de décomposition de X^4-2 sur $\mathbb{Q}$.

app 27 : p premier, $q=p^r$ avec $r\in\mathbb{N}$. Il existe un corps fini à q éléments. Il est isomorphe au corps de décomposition de X^q-X sur $\mathbb{F}_p$ et noté $\mathbb{F}_q$.

5) Algébricité

<u>def 28</u>: $L/\mathbb{K}$. $x \in L$ est <u>algébrique</u> sur $\mathbb{K}$ s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x)=0$. Sinon, x est <u>transcendant</u>

<u>ex 29</u>: π et e sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.

<u>def 30</u>: L algébrique si tous ses éléments sont algébriques

<u>prop 31</u>: Les extensions finies sont algébriques. Réciproque fausse.

<u>c-ex 32</u>: $A = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha$ algébrique sur $\mathbb{Q}\}$. A corps algébrique sur $\mathbb{Q}$, mais non fini.

6) Clôture algébrique :

<u>def 33</u>: $\mathbb{K}$ algébriquement clos ssi tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 1 scindé sur $\mathbb{K}$

<u>ex 34</u>: $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}$ non-algébriquement clos.

<u>prop 35</u>: les corps finis ne sont pas algébriquement clos.

<u>th 36</u>: (D'Alembert Gauss) $\mathbb{C}$ algébriquement clos.

7) Réduction d'endomorphismes : E $\mathbb{K}$-ev de dimension n. $u \in \mathcal{L}(E)$

<u>def 37</u>: $\chi_u(\lambda) := \det(u - \lambda id_E)$ polynôme caractéristique de u. C'est un polynôme de degré n sur $\mathbb{K}$.

<u>prop 38</u>: $Sp(u) =$ Racines (χ_u).

<u>prop 39</u>: u trigonalisable ssi χ_u scindé sur $\mathbb{K}$.

<u>app 40</u>: Les matrices de $M_n(\mathbb{C})$ sont trigonalisables.

<u>app 41</u>: $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ admet au moins une valeur propre réelle.

<u>def 42</u>: multiplicité algébrique $m_u(\lambda)$: multiplicité de λ dans χ_u. Aussi égal à la dimension du sous-espace caractéristique associé.

<u>def 43</u>: multiplicité géométrique $g_u(\lambda)$: dimension de l'espace propre associé à λ.

<u>rem 44</u>: $m_u(\lambda) \geq g_u(\lambda)$.

<u>prop 45</u>: u diagonalisable ssi χ_u scindé et $m_u(\lambda) = g_u(\lambda)$, $\forall \lambda \in Sp(u)$.

II. Polynômes symétriques : ici, $\mathbb{K}$ peut être <u>un anneau</u>

1) Structure algébrique :

<u>def 46</u>: action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $\sigma \cdot P(X_1, \dots, X_n) := P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)})$.

<u>prop 47</u>: $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $u_\sigma : P \mapsto \sigma \cdot P$ automorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres de $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

<u>def 48</u>: P polynôme symétrique si $\underset{\sigma\cdot P}{\sigma(P)} = P$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$.

<u>ex 49</u>: pour $n=2$: $X_1 + X_2$, $X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2$, ...

<u>ex 50</u>: carré du Vandermonde avec $V(X_1, \dots, X_n) = \begin{vmatrix} 1 & X_1 & \dots & X_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_n & \dots & X_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (X_i - X_j)$

<u>def 51</u>: polynômes symétriques élémentaires :

$$\Sigma_1 = X_1 + \dots + X_n, \quad \Sigma_i = \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = i}} \prod_{i \in I} X_i, \quad \Sigma_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

<u>rem 52</u>: chaque Σ_i est somme de $\binom{n}{i}$ monômes de degré i.

<u>th 53</u>: théorème de structure des polynômes symétriques :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] &\to \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n} \quad \text{isomorphisme de } \mathbb{K}\text{-alg.} \\ Q &\mapsto Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) \end{aligned}$$

<u>ex 54</u>: $X_1^2 + \dots + X_n^2 = Q(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n)$ avec $Q = X_1^2 - 2X_2$

2) Relations coefficients-racines : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$.

<u>prop 55</u>: $P = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n) \iff \forall k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{a_{n-k}}{a_n} = (-1)^k \sigma_k$ avec $\sigma_k = \Sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

<u>app 56</u>: (th de Kronecker) : $P \in \mathbb{Z}[X]$ polynôme unitaire non constant tel que $P(0) \neq 0$ et de racines dans $\mathbb{C}$ de module ≤ 1. Les racines de P sont des racines de l'unité. D_1

<u>ex 57</u>: $P = X^2 - 3X + 2$ $\begin{cases} \sigma_1 = x_1 + x_2 = 3 \\ \sigma_2 = x_1 x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

not 58 : formules de Newton : $S_k(X_1,\dots,X_n)=\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

. convention, si $k>n$: $\Sigma_k(X_1,\dots,X_n)=0$

Alors : $\forall k\in\mathbb{N}^*$: $k\Sigma_k=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\Sigma_{k-i}S_i$

app 59 : car $\mathbb{K}=0$, $A\in M_n(\mathbb{K})$: A nilpotente ssi $\forall 1\leq k\leq n$ $Tr(A^k)=0$

3) Discriminant

def/th 60 : Soit $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_{n-k}=(-1)^k\Sigma_k(X_1,\dots,X_n)$.

Il existe un unique polynôme $\Delta_n\in\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_n]$ tel que :

$$\Delta_n(a_{n-1},\dots,a_0)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(X_i-X_j)^2$$

Δ_n appelé discriminant de $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0$, noté $dis(P)$

cor 61 : $dis(P)=\prod_{i<j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ avec (α_i) les racines de P.

cor 62 : P à racines simples ssi $dis(P)\neq 0$

rem 63 : En pratique, $dis(P)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}R(P,P')$ avec R le résultant

ex 64 : $P_1=aX^2+bX+c$: $disP_1=b^2-4ac$

$P_2=X^3+pX+q$: $disP_2=-4p^3-27q^2$

app 65 : le signe de P_1 donne le nombre de racines réelles de P_1

app 66 : $D_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}),$ diagonalisable$\}$ non dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

III. Localisation des racines :

1) Continuité des racines

th 67 : P un polynôme de degré n, ~~z racine de P~~. $\|\cdot\|$: somme des modules des coefficients.

si Q est dans un voisinage de P, les racines de P sont dans un voisinage des racines de Q.

cor 68 : $A\in M_n(\mathbb{C})$, B dans un voisinage de A : les valeurs propres de B sont dans un voisinage de $Sp(A)$.

th 69 (Gershgorin) : $A\in M_n(\mathbb{C})$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $D_i=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a_{ii}|<\sum_{j\neq i}|a_{ij}|\}$

(i) $Sp(A)\subset\bigcup_{i=1}^{n}D_i$

(ii) Dans chaque composante connexe de $\bigcup_{i=1}^{n}D_i$, on compte autant de valeurs propres de A que de disques.

D2

app 70 : $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0\in\mathbb{C}[X]$.

z racine de P vérifie $|z|\leq\max(|a_0|,1+|a_1|,\dots,1+|a_{n-1}|)$

2) Racines de P'

th 71 (Gauss-Lucas) les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

app 72 : 7 est le plus grand entier $n\geq 2$ tel que les racines complexes non nulles de $(X+1)^n-X-1$ soient de module 1.

th 73 : (Rolle) : f continue à valeurs réelles sur $[a,b]$, $a<b$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)$.

Il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$

app 74 : P un polynôme de degré n, de racines $a_1<\dots<a_n$ (réelles).

P' admet $n-1$ racines distinctes situées sur les $]a_i,a_{i+1}[$.

3) Théorème de Rouché

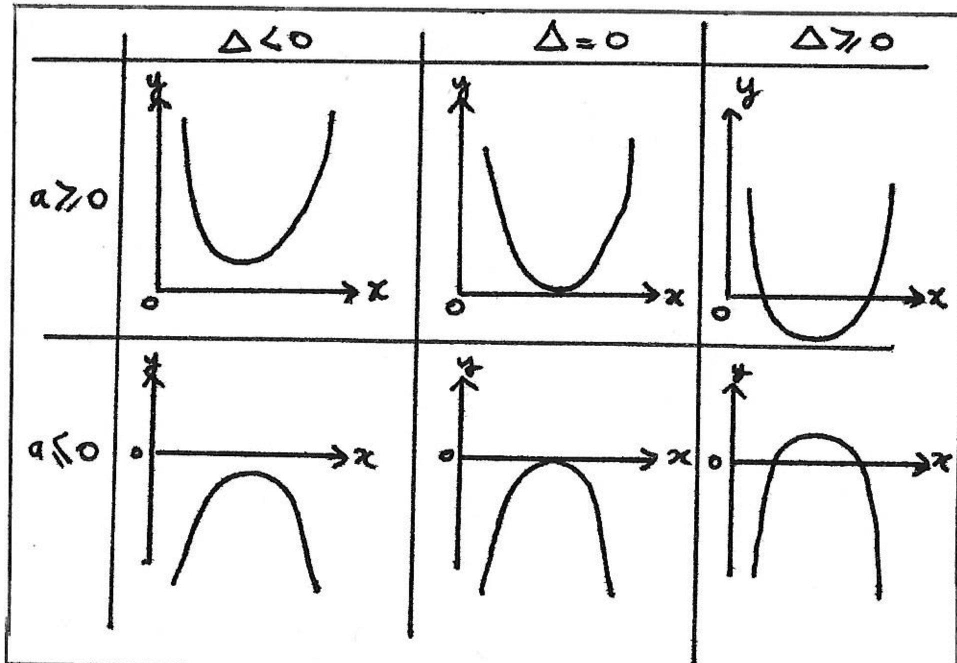
th 75 : $U\subset\mathbb{C}$ ouvert simplement connexe, f,g méromorphes sur U avec un ensemble F fini de zéros et de pôles.

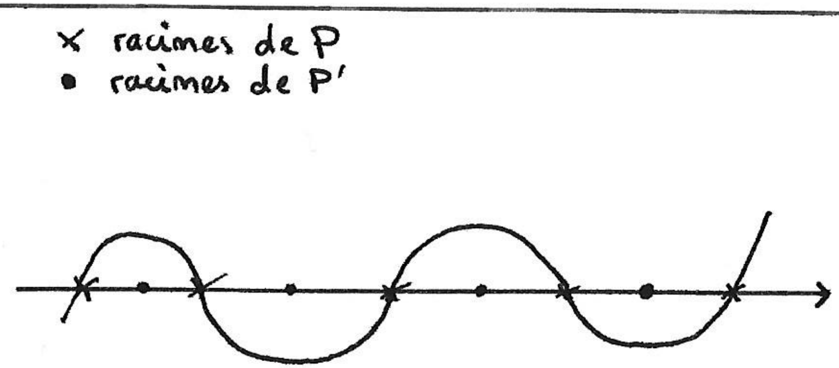
. γ un lacet à image dans $U\setminus F$ formant le bord ∂K d'un compact K. Si $\forall z\in\gamma$, $|f(z)-g(z)|<|g(z)|$:

$Z_{f,K}-P_{f,K}=Z_{g,K}-P_{g,K}$ avec $Z_{f,K},P_{f,K}$: nombre de zéros, pôles sur K.

app 76 : $f=z^8-5z^3+z-2$ admet 3 zéros sur $D(0,1)$.

$g=-5z^3$





$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & i \\ -2i & 0 & -3+2i \end{pmatrix}$$

$D_1 = B(1;2)$
$D_2 = B(-1;1)$
$D_3 = B(-3+2i;2)$