113 : Exemples d'actions de groupe sur les espaces de matrices

On se place dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I - Action par translation

A / Action de $GL_n(\mathbb{K})$

Déf/Prop 1 $GL_n(\mathbb{K})$ agit à gauche (resp. à droite) sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$) par $P.M = PM$ (resp. $M.P = MP$)

Prop 2 Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $M_{p,n}(\mathbb{K})$) sont dans une même orbite ssi elles ont le même noyau (resp. la même image).

Thm 3 (pivot de Gauss) Dans chaque orbite, on a une matrice échelonnée en lignes (resp. en colonnes)

$$\begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 & * \\ 0 \dots & \dots 0 & 1 \; * \\ 0 \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\text{resp. } \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & \vdots \\ 1 & & \vdots \\ * & 1 & \\ & * & 0 \end{pmatrix}\right)$$

[GRI] p'41 p'50 Applications 4 · résolution de systèmes linéaires

· calcul du rang

B / Action de $U_n(\mathbb{C})$

[SER] p'77-78 Déf/Prop 5 $U_n(\mathbb{C})$ agit à droite sur $M_n(\mathbb{C})$ par $M.U = MU$

Prop 6 (décomposition polaire)

Toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ admet une unique matrice hermitienne définie positive dans son orbite :

$\forall M \in GL_n(\mathbb{C}), \exists! (H, U) \in H_n^{++}(\mathbb{C}) \times U_n(\mathbb{C}), M = HU$

Rem 7 On a le même résultat dans $\mathbb{R}$:

$\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists! (S, O) \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}), M = SO$

C / Action de $\mathfrak{S}_n$

[DEL] p'61 Déf 8 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit la matrice de permutation $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\mathcal{P} = \{P_\sigma / \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$

Déf/Prop 9 $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche (resp à droite) sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp. $M_{p,n}(\mathbb{K})$) par $\sigma.M = P_\sigma M$ (resp $M.\sigma = MP_\sigma$)

Prop 10 Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ (resp $M_{p,n}(\mathbb{K})$) sont dans la même orbite ssi elles ont les mêmes lignes (resp. colonnes) à permutation près.

Prop 11 Sur $M_n(\mathbb{K})$ $|\det M|$ est constant sur les orbites (à gauche ou à droite) [GOU] p'36

II - Action de Steinitz

A / Dans $\mathbb{K}$

Déf/Prop 12 On définit l'action de Steinitz comme l'action de $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par : $(P,Q).M = PMQ^{-1}$ [OA] p'155

Prop 13 Deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite ssi elles ont le même rang. Plus précisément, toute matrice M admet dans son orbite $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $r = rg(M)$

Rmq 14 $\{J_r, 0 \leq r \leq \min(n,p)\}$ forme un système de représentants des orbites.

App 15

· $\overline{GL_n(\mathbb{K})} = M_n(\mathbb{K})$ [OA] p'155

· M et ${}^tM$ sont dans la même orbite [GOU] p'188

· $\overline{orb(J_r)} = \bigcup_{k=0}^{r} orb(J_k)$

· Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$ [X-ENS 1] p'331

· Si $\mathbb{k}$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ alors deux matrices équivalentes dans $M_n(\mathbb{K})$ à coefficients dans $\mathbb{k}$ sont équivalentes dans $M_n(\mathbb{k})$

B / Décomposition de Bruhat

Soit K un corps commutatif, T_s l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $M_n(K)$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de K^n.

Déf/Prop 16 $T_s \times T_s$ agit sur $GL_n(K)$ par $(T_1, T_2).M = T_1^{-1} M T_2$

Prop 17 $\{P_\sigma / \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un système de représentants des orbites. Dev.

Corollaire 18 (décomposition de Bruhat) [X-ENS 3] p'347

$GL_n(K) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s P_\sigma T_s$ (union disjointe)

Dev. **App 19** $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$. Il existe $n!$ orbites pour cette action.

C/ Dans un anneau A euclidien

[OA] p 285 **Def/Prop 20** $GL_n(A)\times GL_p(A)$ agit sur $M_{n,p}(A)$ par $(P,Q).M = PMQ^{-1}$

Thm 21 (des facteurs invariants) Soit $M\in M_{n,p}(A)$. Il existe $(d_1,\dots,d_s)\in A\setminus\{0\}$ avec $d_1|\dots|d_s$ tels que $M \sim \begin{pmatrix} d_1 & & & (0)\\ & \ddots & & \\ & & d_s & \\ (0) & & & 0\end{pmatrix}$
De plus $(d_1,\dots,d_s)$ est unique à multiplication des d_i par des inversibles près.

Rem 22 . M et M' sont donc dans la même orbite ssi elles ont les mêmes facteurs invariants
. si A est un corps, on retrouve $\begin{pmatrix} d_1 & & & (0)\\ & \ddots & & \\ & & d_s & \\ (0) & & & 0\end{pmatrix} = J_r$
. le théorème s'étend à un anneau A principal.

III - Action par conjugaison

A/ Action de $GL_n(\mathbb{K})$

Def/Prop 23 $GL_n(\mathbb{K})$ agit par conjugaison sur $M_n(\mathbb{K})$ par $P.M = PMP^{-1}$

[GOU] p 291 **Thm 24** (réduction de Frobenius) Soit $M\in M_n(\mathbb{K})$. Il existe une famille de polynômes unitaires non constants $(P_1,\dots,P_s)$ tels que $P_s|\dots|P_1$ et tels que A soit dans l'orbite de $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_s}\end{pmatrix}$ où $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $C_{P_i} = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0\\ 1 & \ddots & & \vdots\\ (0) & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$ et $P_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$

Rem 25 M et M' sont donc dans la même orbite ssi elles ont les mêmes facteurs invariants $(P_1,\dots,P_s)$.

[OA] p303 **App 26** . M et ${}^tM$ sont dans la même orbite
p 293 . Si k est un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors deux matrices à coef. dans k et semblables sur $\mathbb{K}$ sont semblables sur k.

[GOU] p 199 **Thm 27** (réduction de Jordan dans $\mathbb{C}$) Deux matrices A et B sont dans la même orbite ssi $\forall\lambda\in\mathbb{C}, \forall k\in\mathbb{N}$, $rg(A-\lambda I_n)^k = rg(B-\lambda I_n)^k$

Plus précisément toute matrice a dans son orbite une matrice $\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$ avec $s\in[\![1,n]\!]$ et $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & (0)\\ & \ddots & 1\\ (0) & & \lambda_i\end{pmatrix}$ (unique à ordre des blocs près)

Prop 28 [KENS 2] p 147
. $M\in M_n(\mathbb{C})$ est une homothétie ssi son orbite est bornée.
. $M\in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi son orbite est fermée.

B/ Action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et de $U_n(\mathbb{C})$ sur $M_n(\mathbb{C})$

On donne des représentants des orbites de ces actions sur des sous-ensembles de $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$ [GOU] p 256 -> 260

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$	$\mathbb{K}=\mathbb{C}$
M normale (${}^tMM = M{}^tM$) $\begin{pmatrix} d_1 & & & & (0)\\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & B_1 & \\ (0) & & & & \ddots B_s\end{pmatrix}$ $B_i := \begin{pmatrix} a_i & -b_i\\ b_i & a_i\end{pmatrix}$ $d_i, a_i, b_i\in\mathbb{R}$	M normale $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$, $d_i\in\mathbb{C}$
M symétrique ($M={}^tM$) $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ $d_i\in\mathbb{R}$	M hermitienne ($M=M^*$) $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ $d_i\in\mathbb{R}$
M orthogonale ($M{}^tM = I_n$) $\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & B_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_s\end{pmatrix}$ $B_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}$ $\theta_i\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$	M unitaire ($MM^* = I_n$) $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\end{pmatrix}$ $\lvert d_i\rvert = 1$

IV - Action par congruence

A/ Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $M_n(\mathbb{K})$

Def/Prop 29 $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par congruence : $P.M = PM{}^tP$

B/ Action de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})$

$GL_n(\mathbb{R})$ agit sur $S_n(\mathbb{R})$ de la même façon

[GRI] p 309 **Thm 30** (de Sylvester) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. M a dans son orbite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_s \end{pmatrix}$. Le couple (r,s) est appelé signature de M (signature de la forme bilinéaire symétrique ou forme quadratique associée)

Cor 31 Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont la même signature. Il y a donc $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites dont un système de représentants est $\left\{\begin{pmatrix} I_r & & \\ & -I_s & \\ & & 0 \end{pmatrix}, r+s \leq n\right\}$

[GRI] p 317 **Rem 32** $Stab(M) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) / PM{}^tP = M\}$ est le groupe des isométries associées à la forme quadratique dont la matrice dans une base est M, si M est non dégénérée (noté $O(q)$)

App 33 classification affine des coniques

[ALE] p 160 **Thm 34** Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, il est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

C/ Action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $S_n(\mathbb{C})$

$GL_n(\mathbb{C})$ agit sur $S_n(\mathbb{C})$ de la même façon.

[GRI] p 308 **Prop 35** Deux matrices symétriques sont dans la même orbite ssi elles ont le même rang : un système de représentants est $\left\{\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, r \leq n\right\}$ où r est le rang. Il y a donc $n+1$ orbites.

D/ Action de $T_n^+(\mathbb{R})$ sur $M_n(\mathbb{R})$

$T_n^+(\mathbb{R}) = \{$matrices triangulaires inférieures à coefficients diagonaux strictement positifs$\}$

$T_n^+(\mathbb{R})$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par congruence.

[SER] p 95-96 **Prop 36** L'orbite de I_n est exactement $S_n^{++}(\mathbb{R})$

App 37 (décomposition de Cholesky)
Si $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\exists L \in T_n^+(\mathbb{R})$, $M = {}^tL L$. De plus, L est unique.

Références

[GRI] Grifone : "Algèbre linéaire"

[SER] Serre : "Les matrices, théorie et pratique"

[DEL] Delcourt : "Théorie des groupes"

[GOU] Gourdon : Algèbre

[OA] "Objectif Agrégation"

[XENS 1] "Oraux XENS Algèbre 1"

[XENS 2] "Oraux XENS Algèbre 2"

[ALE] Alessandri "Thèmes de géométrie"