150

Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

I Actions par multiplication

1) Action de $GL_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche
$(P, M) \longmapsto P \times M$.

prop : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même noyau.

rmq : En transposant, on a une caractérisation des orbites de l'action à droite $GL_n(\mathbb{K}) \times M_{p,n}(\mathbb{K}) \to M_{p,n}(\mathbb{K})$, $(P, M) \longmapsto MP$ par les images

thm : Dans chaque orbite on a une matrice échelonnée en lignes

app :
* résolution de systèmes linéaires
* calcul du rang
* complétion d'une famille libre

2) Action de $U_n(\mathbb{C})$ et $O_n(\mathbb{R})$.

$U_n(\mathbb{C})$ agit sur $M_n(\mathbb{C})$ par multiplication à droite.

prop (décomposition polaire) : Toute $M \in GL_n(\mathbb{C})$ contient une unique matrice $H \in H_n^{++}(\mathbb{C})$ dans son orbite.

rmq : De même $O_n(\mathbb{R})$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists! S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans l'orbite de M.

II Action par équivalence (de Steinitz)

1) Sur un corps

$GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ agit sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ via $(P,Q).M = PMQ^{-1}$

rmq : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles représentent les mêmes applications linéaires dans des bases éventuellement différentes.

prop : Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même rang. Un système de représentants est $\{J_r, r \in [\![0, \min(p,n)]\!]\}$ où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

app :
* $rg(A) = rg({}^tA)$.
* si $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, $M_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K}) + GL_n(\mathbb{K})$.
* Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\overline{M_n(\mathbb{K})} = \overline{GL_n(\mathbb{K})}$ et $\overline{\{M, rg(M) = r\}} = \{M, rg(M) \leq r\}$.
* Tout hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ coupe $GL_n(\mathbb{K})$.
* Si $k \hookrightarrow \mathbb{K}$, deux matrices de $M_n(k)$ équivalentes sur $\mathbb{K}$ le restent sur k.
* Si φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, alors $\varphi(GL_n(\mathbb{C})) \subset GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall M, rg(\varphi(M)) = rg(M)$.

2) Sur un anneau

Soit A un anneau euclidien. Alors $GL_n(A) \times GL_p(A)$ agit sur $M_{n,p}(A)$ de même.

thm : Si $M \in M_{n,p}(A)$ il existe $d_1 \dots d_s \in A$ tels que $d_1 | \dots | d_s$ et $M \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ De plus, si $M \sim \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d'_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d'_r \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ alors $r = s$ et d_i, d'_i sont associés.

cor : Un système de représentant des orbites est $\left\{ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_s \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s \leq n, d_1 | \dots | d_s, d_s \neq 0 \right\}$

rmq : Si A est un corps, on retrouve les matrices J_r

rmq : Le théorème reste vrai si A est principal app : classification des A-modules de type fini.

3) Restriction aux matrices triangulaires

Soit T_s l'ensemble des matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures. $T_s \times T_s$ agit sur $GL_n(\mathbb{K})$ par équivalence

déf : Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice $(\delta_{j,\sigma(i)})_{i,j}$.

thm (DEV) : $\{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ est un système de représentants des orbites. En particulier $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} T_s P_\sigma T_s$

II Actions par conjugaison

1) Action de $GL_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par $P.M = PMP^{-1}$

thm (Frobénius) : Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique famille $P_1 \dots P_r \in \mathbb{K}[X]$ unitaires non constants tels que $P_r | \dots | P_1$ et que l'orbite de M contienne $\begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{P_r} \end{pmatrix}$ où C_{P_i} est la matrice compagnon de P_i.

rmq : $P_1 = \Pi_M$ et $\chi_M = P_1 \dots P_r$

app : * M et ${}^tM$ sont dans la même orbite.

* Si $n \leq 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M et N sont semblables ssi $\chi_M = \chi_N$ et $\Pi_M = \Pi_N$
* Si $k \hookrightarrow \mathbb{K}$, deux matrices de $M_n(k)$ semblables sur $\mathbb{K}$ le sont sur k.

thm (Jordan) : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, un système de représentants des orbites est, une fois un ordre sur $\mathbb{C}$ fixé,

$\left\{ \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & N_s \end{pmatrix}, s \in [\![1,n]\!], N_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{n_i}(\mathbb{C}), \lambda_i \leq \lambda_j, n_i \leq n_j \right\}$.

thm : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A et B sont semblables ssi $\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$
$rg(A - \lambda I)^k = rg(B - \lambda I)^k$

prop : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$,

- M est scalaire ssi son orbite est fermée ssi son orbite est $\{M\}$
- l'orbite de M est connexe par arcs
- M est diagonalisable ssi son orbite est fermée
- M est nilpotente ssi son orbite est adhérente à 0.

app : dénombrement des matrices diagonalisables sur $\mathbb{F}_q$.

2) Action sur $\mathcal{P} = \{P_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

prop : $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes donc P_σ et P_τ sont conjuguées dans $\mathcal{P}$ ssi σ et τ le sont dans $\mathfrak{S}_n$

thm (Brauer) : Si $Car(\mathbb{K}) = 0$, P_σ et P_τ sont conjuguées dans $GL_n(\mathbb{K})$ ssi σ et τ le sont dans $\mathfrak{S}_n$.

cor : il y a $p(n)$ orbites où $p(n)$ est le nombres de façons d'écrire n en $\sum_{i=1}^{k} m_i$, $m_1 \geq \dots \geq m_k$

3) Actions de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$.

prop : Si M est orthogonale, l'orbite de M sous $O_n(\mathbb{R})$ contient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & \\ 0 & -I_s & 0 & \\ 0 & 0 & R(\theta_1) & 0 \\ & & 0 & \ddots\ R(\theta_p) \end{pmatrix}$ avec $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

app : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

prop : Si M est unitaire, l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient $diag(\lambda_1 \dots \lambda_n)$ avec $|\lambda_i| = 1$.

prop : Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ et $[M, M^*]=0$, l'orbite de M sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale.

cor : Si M est antisymétrique, son orbite sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale réelle.

prop : Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $[M, {}^tM]=0$, l'orbite de M sous $O_n(\mathbb{R})$ contient une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_p & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_q \end{pmatrix} \text{ avec } \tau_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \text{ et } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

cor : si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et M antisymétrique, on a ce résultat avec $\lambda_i = a_i = 0$.

thm : Si M est symétrique réelle, son orbite sous $O_n(\mathbb{R})$ contient une matrice diagonale.

thm : Si M est hermitienne, son orbite sous $U_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale réelle

IV Actions par congruence.

$GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par congruence $P.M = {}^tPMP$.

1) Action sur $S_n(\mathbb{K})$.

Si on identifie les matrices de $S_n(\mathbb{K})$ et les formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$, on obtient les résultats suivants.

thm : Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, son orbite contient une unique matrice $\left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. (r,s) est appelé signature de M.

cor : deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont même signature. Il y a $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ orbites dont un système de représentants est $\left\{ \left(\begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right), r,s \right\}$.

app : classification affine des coniques/quadriques.

thm (DEV) : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$

thm : Si $M \in S_n(\mathbb{C})$, son orbite contient une unique matrice J_r. Deux matrices sont congruentes ssi elles ont même rang. Un système de représentants des orbites est $\{J_r, r \in [\![0,n]\!]\}$.

rmq : Si on a une classification des formes quadratiques sur $\mathbb{K}^n$, on a un système de représentants.

2) Action de $T_s^+(\mathbb{R})$

def : $T_s^+ = \{M \in T_s, \forall i, m_{i,i} > 0\}$

T_s^+ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par congruence.

prop : L'orbite de I_n contient S_n^{++}.

app (Choleski) : $\forall S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \exists! B \in T_s^+(\mathbb{R}), S = {}^tBB$