Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

[GRI] p 39

Cadre : On se place sur un espace E (F sera eventuellement un deuxième espace vectoriel) de dimension finie, on se fixe un corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Action par translation

1) Définition et motivation

Motivation 1 : On s'intéresse à la résolution du système linéaire $Ax = b$ où $A = M_n(\mathbb{K})$ et $b = M_{n,1}(\mathbb{K})$

Définition / proposition 2 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche :

$$GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$
$$(P\ ,\ M) \longmapsto PM$$

On parle d'action par translation à gauche.

On peut aussi définir une action par translation à droite

$$GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$
$$(P\ ,\ M) \longmapsto MP^{-1}$$

Définition 3 : On dit qu'une matrice est échelonnée si les lignes commençant par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente

Exemple 4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice échelonnée

Application 5 : On peut résoudre un système linéaire sous forme échelonnée en remontant les équations

Exemple 5 : $\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2y + 8z = 2 \\ t = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 11\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ t = 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Proposition 6 : $\forall A \in M_n(\mathbb{K})\ \exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que PA soit échelonnée. Toute orbite admet, sous l'action de translation, une matrice échelonnée

2) Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$

Motivation 7 : Connaître la matrice de passage P tel que PA soit échelonnée est essentielle pour avoir $PAx = Pb$; on s'intéresse donc aux générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$.

Définition / proposition 8 : Soit H un hyperplan de E et soit $u \in GL(E)$ tel que $u_{|H} = id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes : 1) On a $\det u = \lambda \neq 1$ 2) u admet une val. propre $\lambda \neq 1$ 3) On a $Im(u - id) \not\subset H$ 4) Dans une base convenable, u a pour matrice $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda \neq 1$

On dit que u est une dilatation d'hyperplan H, de droite D, de rapport λ.

Définition / proposition 9 : Soit H un hyperplan de E et soit $f \in E^*$ tel que $H = \ker f$. Soit $u \in GL(E)$, $u \neq id$ tel que $u_{|H} = id_H$. Les conditions suivantes sont équivalentes
1) $\det u = 1$ 2) u n'est pas diagonalisable
3) $D = Im(u - id) \subset H$ 4) L'homomorphisme induit $\bar{u} : E/H \to E/H$ est l'identité de E/H
5) $\exists a \in H$, $a \neq 0$ tel que l'on ait $\forall x \in E\ u(x) = x + f(x)a$
6) Dans une base convenable u a pour matrice : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

On dit alors que u est une transvection d'hyperplan H et de droite D.

Proposition 10 : Les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{K})$

[PER] p 36

3) Caractérisation des orbites

Proposition 11 : Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Alors on a : (A et B sont dans la même orbite) $\iff$ ($\ker A = \ker B$)

Définition 12 : Si une matrice échelonnée a des lignes dont le premier terme non nul est 1 et que les colonnes qui leurs sont associées n'ont que lui comme élément non nul alors on dit que la matrice est échelonnée réduite

Exemple 13 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est échelonnée réduite

Proposition 14 : Il n'y a qu'une seule matrice échelonnée réduite par orbite.

Remarque 15 : L'action n'est pas transitive

II Action de Steinitz

1) Rang et orbite

Définition / Proposition 16 : $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ agit sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$(GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})) \times M_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$((P, Q)\ ,\ M) \longmapsto PMQ^{-1}$$

On l'appelle l'action de Steinitz

Remarque 17 : Cette action traduit un changement de base au départ et à l'arrivée pour un endomorphisme

[H2G2] / [H0]

Définition 18 : Si deux matrices sont dans une même orbite sous l'action de Steinitz, on dit qu'elles sont équivalentes.

Théorème 19 : Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors A est équivalente à $J_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où I_r est la matrice identité de taille r.

On a une caractérisation de l'orbite par le rang.

Application 20 : $rg A = rg({}^tA)$ pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$

Application 21 : Soient $A \in M_{n,p}(k)$ et k' un corps contenant le corps k. Le rang de $A \in M_{n,p}(k')$ est le même que celui de $A \in M_{n,p}(k)$

Corollaire 22 : On reprend $k \subset k'$ deux corps. Deux matrices équivalentes dans k' le sont aussi dans k.

2) Topologie matricielle.

Proposition 23 : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$

[Avez]

Théorème 24 : Soit m et n deux entiers. Pour r entier satisfaisant à $0 \leq r \leq \min(m,n)$, on note Θ_r l'orbite des matrices de rang r à coefficient dans $\mathbb{K}$. Alors l'adhérence $\overline{\Theta_r}$ de l'orbite est donnée par :

$\overline{\Theta_r} = \bigsqcup_{0 \leq k \leq r} \Theta_k$

Corollaire 25 : La seule orbite fermée est $\Theta_0 = \{0\}$. L'unique orbite ouverte est $\Theta_{\min(m,n)}$

[??]

Théorème 26 : Si $p \leq n-1$, alors Θ_p est une partie connexe de $M_n(\mathbb{K})$

3) Le cas de l'anneau principal.

Théorème 27 : Soit $M \in M_{n,m}(A)$ une matrice à coefficient dans un anneau principal. Alors il existe deux matrices inversibles $P \in GL_n(A)$, $Q \in GL_m(A)$ et une matrice $\Delta \in M_{n,m}(A)$ quasi-diagonale (c'est à dire $d_{ij}=0$ pour $i \neq j$), telles que :

- d'une part $M = P\Delta Q^{-1}$
- D'autre part $d_1 | d_2 | \cdots | d_i | d_{i+1} \cdots$ en notant d_j les coefficients diagonaux de Δ

De plus si $M = P'\Delta' Q'^{-1}$ est une autre décomposition de cette nature, les scalaires d_j et d_j' sont associés aux inversibles près, il sont donc uniques.

[SER] p66

Définition 28 : Les scalaires $d_1, \cdots, d_r$ ($r = \min(n,m)$) sont appelés les facteurs invariants de M

III Action par conjugaison

1) Généralités

Définition/proposition 29 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par

$$GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$
$$(P, M) \longmapsto PMP^{-1}$$

On parle d'action par conjugaison

Définition 30 : Deux matrices dans la même orbite sont dites semblables.

Remarque 31 : La conjugaison traduit un changement de base pour un endomorphisme.

Définition 32 : On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale

Application 33 : Calcul de puissance A^n, $n \in \mathbb{N}$.

[GOU] p163 + p230 + p158 Jordan

Définition 34 : Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 35 (Jordan) : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que son polynôme caractéristique P_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f ait la forme $[f]_B = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}$

où $\forall i$ $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \nu_{i,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \nu_{i,d_i-1} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{d_i}(\mathbb{K})$ avec $\nu_{i,j} \in \{0,1\}$

2) Invariants de similitude

Théorème 36 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite $F_1, F_2, \cdots, F_r$ de s.e.v de E tous stables par f tel que :

(i) $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$

(ii) Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, la restriction $f_i = f_{|F_i}$ de l'endomorphisme f au s.ev F_i est un endomorphisme de F_i cyclique

(iii) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i, on a $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, r-1\}$

La suite des polynômes $P_1, \dots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition.

Définition 37 : On appelle cette suite de polynômes suite des invariants de similitude de f

Définition 38 : On appelle matrice compagnon de P la matrice $C(P) = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & & 1 & -a_{p-1} \end{bmatrix}$

où $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$

Théorème 39 (Réduction de Frobenius) : Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base B de E tel que :

$[f]_B = \begin{bmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{bmatrix}$

Corollaire 40 : Deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont mêmes invariants de similitude

3) Orbites engendrées par les matrices normales

Définition 41 : Une matrice est dite normale si ${}^t\bar{A} A = A {}^t\bar{A}$ pour $A \in M_n(\mathbb{K})$

Remarque 42 : ∘ Les matrices normales sont les matrices qui représentent les endomorphismes normaux dans une base orthonormée

∘ En particulier sont normales : les matrices réelles symétriques, antisymétriques réelles, hermitiennes, orthogonales et unitaires.

Théorème 43 : (réduction des endomorphismes normaux) : Soit E euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthogonale B de E tel que :

$[u]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \tau_1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \tau_s \end{bmatrix}$ où pour tout i, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, pour tout j $\tau_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Remarque 38 : On trouve un représentant des orbites engendrées par une matrice normale.

IV Action par congruence

Définition/Proposition 44 : $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $M_n(\mathbb{K})$ par

$$GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$
$$(P, M) \longmapsto PM{}^tP$$

On parle d'action par congruence

Définition 45 : Deux matrices dans la même orbite sont dites congrues.

Remarques 46 : ∘ Quand on se restreint à $O_n(\mathbb{K})$ qui code un endomorphisme, cette action traduit un changement de base dans une base orthonormée

∘ Dans le cadre des formes quadratique que peut coder $S_n(\mathbb{K})$ l'action correspond à un changement de base.

Théorème (de Sylvester) 47 : Soit ϕ une forme quadratique. On sait que ϕ admet une décomposition sous la forme $\phi(x) = g_1(x)^2 + \dots + g_p(x)^2 - g_{p+1}(x)^2 - \dots - g_{p+q}(x)^2$ où (g_i) sont des formes linéaires indépendantes.

Si ϕ admet une autre décomposition de ce type $(\phi(x) = f_1(x)^2 + \dots + f_{p'}(x)^2 - f_{p'+1}(x)^2 - \dots - g_{p'+q'}(x)^2)$ alors $p = p'$ et $q = q'$. On appelle (p, q) la signature de la forme quadratique, c'est un invariant sous l'action de congruence.

DEV 2

[GRI] p 286

[Gou] p 228

Références.

[GOU] Gourdon, Algèbre
[GRI] Griffone, Algèbre linéaire
X-ENS alg 2
[OA] Objectif Agrégation
[MT] Mneimné Testard, Introduction à la théorie des Groupes de Lie classique
[SER] Serre, Matrices
([$H_2 G_2$] Caldero, Histoires hédonistes de groupes et de géométries)

Ajouts possibles:

- Représentations
- Plus accès action de groupe (stabilisateur etc...)
- Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{N}(\mathbb{K})$ (= nilpotente)

REDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX

Référence : GOURDON *Algèbre* p. 260

Définition 1. Soit E un espace hermitien. $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si u et u^* commutent.

Le lemme suivant est valable lorsque E est euclidien :

Lemme 1. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$*

1. *Si F un s.e.v de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.*
2. *Si de plus u est normal et E_λ est un sous-espace propre de u, $E_\lambda^\perp$ est stable par u.*

Preuve.

1. Soit $x \in F$.
$$\langle u^*(y), x\rangle = \langle \underbrace{y}_{\in F^\perp}, \underbrace{u(x)}_{\in F}\rangle = 0$$
Donc $u^*(y) \in F^\perp$ ie $F^\perp$ est stable par u^*.
2. Comme u et u^* commutent, E_λ est stable par[1] u^* donc d'après le premier point, $E_\lambda^\perp$ est stable par $(u^*)^* = u$.

□

On s'intéresse maintenant au cas réel : on considère dans la suite un espace euclidien E.

Lemme 2. *Soit E un espace euclidien de dimension 2 ; $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal n'admettant pas de valeurs propres réelles. Dans toute base othnormale B de E on a :*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ avec\ b \neq 0.$$

Preuve. Ecrivons :

$$M = \mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

On a $b \neq 0$ car u est sans valeur propre réelle. Comme u est normal $M^*M = MM^*$, on a donc en particulier (par identification des coefficients) :

$$a^2 + c^2 = a^2 + b^2 \text{ et } ab + cd = ac + bd$$

On a donc $b = c$ ou $b = -c$ par la première assertion Si $b = c$ alors M est symétrique (donc diagonalisable), ce qui est impossible car u est sans valeur propre réelle. Donc $b = -c$. On a donc en reportant dans la seconde assertion $2(a - d)b = 0$ soit $a = d$.

□

Théorème 1 (Réduction des endomorphismes normaux (cas réel)). *Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormale B de E telle que*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix} \qquad (\star)$$

1. si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent, alors tout sep de f est stable par g.

où pour tout i $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et pour tout j, $\tau_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Preuve.
La démonstration se fait par récurrence forte sur $n = \dim(E)$.
Si $n = 1$ il n'y a rien à montrer.
Supposons alors le résultat vrai pour tout espace euclidien de dimension inférieure à $n-1$ et considérons E un espace euclidien de dimension n. Deux cas se présentent :

_Si u a une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$ alors on peut considérer $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ et $F = E_\lambda^\perp$. F est stable par u et par u^* (par le **Lemme 1**) donc on peut considérer les endomorphismes induits $u_{|F}$ et $u^*_{|F}$qui commutent (car u est normal). Comme $\dim(F) \leqslant n-1$ il existe, par hypothèse de récurrence, une BON B_F de F telle que $\mathrm{Mat}_{B_F}(u_{|F})$ soit de la forme $(*)$. Alors si B_1 est une BON de E_λ [2] on a $B = (B_1, B_F)$ est une BON de $E = F^\perp \oplus F$ [3] dans laquelle $\mathrm{Mat}_B(u)$ est de la forme $(\star)$.

_ Sinon u est sans valeur propre réelle. Idée : se ramener au cas $n = 2$ avec un bon espace.
Considérons $Q = X^2 - 2\alpha X + \beta$ un facteur irréductible (donc $\alpha^2 - \beta < 0$) du polynôme caractéristique de u (ie $\chi_u = QP$, possible ici car $n \geqslant 2$). Posons $N = \mathrm{Ker}(Q(u))$.
Montrons que $N \neq \{0\}$.
En effet, on peut écrire $Q = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ où $\lambda \in \mathbb{C}$. λ est racine de Q donc de χ_u, donc est une valeur propre complexe de u donc $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$. Alors on a

$$\det(Q(u)) = \det(u - \lambda Id)\det(u - \bar{\lambda} Id) = 0$$

ie $\mathrm{Ker}(Q(u)) \neq \{0\}$. N est stable par u et par u^* (l'écrire, ça vient de u et u^* commutent et que $Q(u)$ est un polynome en u).
On peut donc considérer $v = u_{|N}$. On a $v^* = u^*_{|N}$, et ainsi l'endomorphisme $v^*v = (u^*u)_{|N}$ est symétrique réel donc admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons $x \in N \setminus \{0\}$ un vecteur propre (pour v^*v) associé à λ. Posons $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Comme u n'admet pas de valeur propre réelle, $(x, u(x))$ est une famille libre et donc $\dim(F) = 2$.
F est stable par u car $x \in N = \mathrm{Ker}(Q(u))$ donc $u^2(x) = 2\alpha u(x) - \beta x \in F$ $(**)$.
Montrons que F est aussi stable par u^*. La relation $(**)$ entraine que $F = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x))$ (car $\beta \neq 0$ puisque $\alpha^2 - \beta < 0$).
On a

$$u^*(u(x)) = v^*(v(x)) = \lambda x \in F$$

et comme u et u^* commutent,

$$u^*(u^2(x)) = u(u^*u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) \in F$$

ce qui montre que F est stable par u^* car $(u(x), u^2(x))$ est une base de F.

Comme $(u_{|F})^* = (u^*)_{|F}$, $u_{|F}$ est un endomorphisme normal. Par le **Lemme 2**, dans une BON B_F de F, $\mathrm{Mat}_{B_2}(u_{|F})$ est de la forme

$$\tau = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Or, $F^\perp$ est stable par $(u^*)^*$ (car F est stable par u^*) et par u^* (car F est stable par u). Donc $(u_{F^\perp})^* = (u^*)_{|F^\perp}$, ce qui prouve que $u_{|F^\perp}$ est normal.
Ainsi par hypothèse de récurrence (car $\dim(F) = n-2$), il existe une BON B_1 de $F^\perp$ telle que $\mathrm{Mat}_{B_1}(u_{|F^\perp})$ soit de la forme $(\star)$.
Ainsi la base $B = (B_1, B_F)$ est une BON de E dans laquelle la matrice de u est de la forme $(\star)$.

□

2. Elle va seulement rajouter un $\mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$
3. dimension finie

ACTION DE STEINITZ

· Références :

: Histoires hédonistes des groupes et de géométries, Caldero - Germoni, Caboraze et Hounet 2013
p2 à 5 et p9 à 11

· Leçons : 101, 150, 151 et éventuellement 152

Soit $K=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère l'action de Steinitz définie par :

$$(GL_m(K)\times GL_n(K)) \times \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(K)$$
$$((P\ ,Q\ )\ ,\ M) \longmapsto PMQ^{-1}$$

Alors :

1) Deux matrices A, B sont dans la même orbite ssi $rg(A)=rg(B)$ (théorème du rang). On note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r, pour r entier tel que $0\leqslant r\leqslant \min(m,n)$

2) L'adhérence de $\mathcal{O}_r$ est donnée par : $\overline{\mathcal{O}_r}=\bigsqcup_{k=0}^{r}\mathcal{O}_k$ (union disjointe).

Démo :

① $\Rightarrow$] Soit A et B deux matrices équivalentes (= "dans la même orbite pour cette action"). Donc :

$\exists (P,Q)\in GL_m(K)\times GL_n(K) := G \qquad B=PAQ^{-1}$

c'est-à-dire que A et B expriment la même forme linéaire par changement de base :

soit $\mathbf{e}$ une base de K^n et $\mathbf{f}$ une base de K^m et $\varphi : K^n\to K^m$ une application linéaire telle que $A=\mathcal{M}at_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$ ie les colonnes de A sont données par les vecteurs $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathbf{f}$. Comme $(P,Q)\in G$, ce sont des matrices de changement de base, par exemple P = matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e}'$
Q = matrice de passage de $\mathbf{f}$ à $\mathbf{f}'$

pour $\mathbf{e}'$ base de K^n et $\mathbf{f}'$ base de K^m.

Donc $B=PAQ^{-1}=\mathcal{M}at_{\mathbf{e}',\mathbf{f}'}(\varphi)$.

RAPPEL

En particulier, $rg(A)=\dim(\mathrm{Vect}(\text{colonnes de } A))=\dim(\mathrm{Im}(\varphi))=rg(\varphi)$ et de même pour B. Donc $rg(A)=rg(B)$

$\Leftarrow$] Soit A matrice de rang r. On considère $\mathbf{e}$ base de K^n, $\mathbf{f}$ base de K^m, $\varphi : K^n\to K^m$ application linéaire telle que $A=\mathcal{M}at_{\mathbf{e},\mathbf{f}}(\varphi)$ (par exemple, prendre les bases canoniques et $\varphi.\ X\in K^n\mapsto AX\in K^m$)

On note $I_{m,n,r}=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\updownarrow r\\ \updownarrow m-r\end{array}\in\mathcal{M}_{m,n}(K)$, avec des blocs de colonnes de largeurs r et $n-r$.

Il suffit de montrer que A est équivalente à $I_{m,n,r}$. Alors de même B sera aussi équivalente à $I_{m,n,r}$, donc à A.

$(I_{m,n,r}=PAQ^{-1}=\tilde{P}B\tilde{Q}^{-1} \Rightarrow A=(P^{-1}\tilde{P})B(Q^{-1}\tilde{Q})^{-1})$

Soit $(e''_1, \dots, e''_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, qu'on complète en une base de K^n, notée $e' = (e'_1, \dots, e'_t, e''_1, \dots, e''_s)$ avec $t+s=n$. On note $E' = \mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_t) \subset K^n$ et $f'_i = \varphi(e'_i)$ pour tout $1 \leq i \leq t$. Alors:

$$\begin{cases} \varphi_{|E'} \text{ injective (car } K^n = E' \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) \text{ et } \mathrm{Ker}(\varphi_{|E'}) = E' \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}) \\ (e'_i)_{1 \leq i \leq t} \text{ est libre} \end{cases}$$

$\Rightarrow (f'_i)_{1 \leq i \leq t}$ est une famille libre de K^m, qu'on complète en une base $f' = (f'_1, \dots, f'_t, f'_{t+1}, \dots, f'_m)$. Alors $\underset{e', f'}{\mathcal{M}at}(\varphi) = I_{m,n,r} = PAQ^{-1}$

où P et Q sont les matrices de changement de base. Donc équivalence.

② • Petit rappel sur les mineurs:

pour $I \subset [\![1,m]\!]$ et $J \subset [\![1,n]\!]$ tq $|I| = |J|$, le mineur d'indice (I,J) est défini par:

$$\Delta_{I,J} : \mathcal{M}_{m,n}(K) \longrightarrow K \qquad (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \mapsto \det\left((a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}\right)$$

• C'est une fonction continue car polynomiale en les coefficients de la matrice (avec le determinant).

On peut caractériser le rang :

$$rg(A) = \max\{r \in \mathbb{N} \mid \exists I \subset [\![1,m]\!], \exists J \subset [\![1,n]\!], |I| = |J| = r,\ \Delta_{I,J}(A) \neq 0\}$$

ie c'est l'ordre du plus grand mineur non nul.

En particulier, $(rg(A) \leq r) \Leftrightarrow (\forall k \geq r+1$, les mineurs d'ordre k sont tous nuls$)$

• Montrons que $\bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$ est fermé dans $\mathcal{M}_{m,n}(K)$:

$$\bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k = \bigcup_{k=0}^{r} \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \mid rg(A) = k\} = \{A \in \mathcal{M}_{m,n}(K) \mid rg(A) \leq r\}$$
$$= \bigcap_{\substack{I \subset [\![1,m]\!] \\ J \subset [\![1,n]\!] \\ |I| = |J| \geq r+1}} \Delta_{I,J}^{-1}(\{0\})$$

Or, $\Delta_{I,J}^{-1}(\{0\})$ est fermé ($\Delta_{I,J}$ continue et $\{0\}$ fermé) et l'intersection de fermés est fermée.

De plus, $\mathcal{O}_r \subset \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$, on a $\overline{\mathcal{O}_r} \subset \bigsqcup_{k=0}^{r} \mathcal{O}_k$ car $\overline{\mathcal{O}_r}$ est le plus petit fermé contenant $\mathcal{O}_r$.

• Reste à voir l'inclusion réciproque:

soit A matrice de rang $k \leq r$. D'après ①, il existe $(P,Q) \in G$ tels que $A = P I_{m,n,r} Q^{-1}$. On note $A_j := P \begin{pmatrix} I_k & & \\ & \frac{1}{j} I_{r-k} & \\ & & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$ qui est dans $\mathcal{O}_r$ pour tout j (car équivalente à une matrice de rang r). De plus, $A_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} A$ donc $A \in \overline{\mathcal{O}_r}$ et ainsi on a montré le théorème

Conséquences :

- L'unique orbite fermée est l'orbite de la matrice nulle : $\overline{\mathcal{O}_0} = \bigsqcup_{k=0}^{0} \mathcal{O}_k = \mathcal{O}_0 = \{0_{\mathcal{M}_{n,m}(K)}\}$ appelée orbite minimale
- L'unique orbite ouverte est l'orbite maximale : $\mathcal{O}_{\min(n,m)}$ $(:= \tilde{\mathcal{O}})$ car $\tilde{\mathcal{O}}^c = \bigsqcup_{k=0}^{\min-1} \mathcal{O}_k$ qui est fermé
- La fonction $rg : \mathcal{M}_{n,m}(K) \to \mathbb{N}$ n'est pas continue pour $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ car $rg^{-1}(\{r\}) = \mathcal{O}_r$ n'est pas fermé pour $r \geq 1$.

Bonus :

A est de rang $r \Leftrightarrow$ (il existe un determinant extrait d'ordre r non nul et tous les ~~déterminants~~ extraits d'ordre $r+1$ sont nuls)

demo : • montrons que : $rg(A) \geq r \Leftrightarrow$ il existe un determinant extrait d'ordre r non nul

$\Rightarrow$] Supposons $rg(A) \geq r$ où $r \leq \min(m,n)$

Quitte à permuter les colonnes, on suppose que les r premières sont libres :

$$rg\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr}\end{pmatrix} = r$$

Or, $rg(M) = rg({}^tM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ donc $rg\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{mr}\end{pmatrix} = r$

Quitte à permuter, on peut aussi supposer que les r premières colonnes sont libres :

$rg\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{r1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1r} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix} = r$. Cette matrice extraite est de rang r dans $\mathcal{M}_r(K)$ donc inversible. On a donc un déterminant extrait d'ordre r non nul.

$\Leftarrow$] Supposons qu'il existe un determinant extrait d'ordre r non nul. Quitte à permuter les lignes et les colonnes, on peut supposer que c'est celui de $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$

Alors les r premières colonnes de A (notées $A_1, \dots, A_r$) sont indépendantes car :

$$\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_r A_r = 0 \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{pmatrix}}_{\text{de déterminant non nul}} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq i \leq r,\ \lambda_i = 0$$

car c'est un système de Cramer.

• Comme $(rg(A) = r) \Leftrightarrow (rg(A) \geq r$ et $rg(A) < r+1)$, on a bien l'équivalence.

■