150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

On étudie des résultats d'algèbre linéaire classiques comme la réduction d'endomorphisme ou la topologie matricielle, mais vu sous l'angle d'actions de groupes sur des espaces de matrices.

I. Actions par translation.

On s'intéresse ici à des actions de G sur $\mathcal{M}$ où $G \subset Gl_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}$ un ensemble de matrices, de la forme $G \cdot M = GM$, par "multiplication à gauche".

1) $Gl_n(\mathbb{K}) \rightsquigarrow \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$ à gauche. [H₂G₂]

Motivation (parmi d'autres) : On veut résoudre un système linéaire $AX = Y$ en résolvant $PAX = PY$ avec $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ où PA a une forme sympathique pour la résolution.

En multipliant A à gauche, on agit sur les lignes. On définit :

- G est une matrice de permutation, on permute les lignes. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$
- Si $G = Id + \alpha E_{ij}$, $i \neq j$, on additionne α fois la ligne j à la ligne i : ①
- Si $G = Id + (-1+\alpha)E_{ii}$, on multiplie la ligne i par α, avec $\alpha \neq 0$ ②

$\longrightarrow$ On peut traduire un procédé algorithmique par une matrice $G \in Gl_n(\mathbb{R})$ bien choisie.

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. $Orb(A)$ contient une matrice sous forme échelonnée, réduite de la forme :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
. 6 représentant et unique

Théorème (Invariant total)
Deux matrices sont dans la même orbite ssi elles ont le même noyau

Applications : - Algorithme du pivot de Gauss.
- Calcul du déterminant
- Résolution de systèmes linéaires.

2) Action à droite [H₂G₂]

On définit l'action par multiplication à droite :
$$\begin{cases} Gl_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ (G, M) \longmapsto MG^{-1} \end{cases}$$

Théorème : Deux matrices sont dans la même orbite pour cette action si et seulement si elles ont même image.

Applications : - Calcul du rang - Décomposition de Bruhat.
- Calcul de l'inverse d'une matrice.

Prop : les matrices de transvections ① et de dilatation ② engendrent $Gl_n(\mathbb{K})$

3) Action de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ (H₂G₂)

- Action par translation à gauche : $(U, M) \mapsto UM$, $U \in O_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$U_n(\mathbb{C})$, — $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Théorème (de décomposition polaire).
- Toute matrice $\{G \in Gl_n(\mathbb{R})$, $G' \in Gl_n(\mathbb{C})$ contient une unique matrice $\{S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $S' \in \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$ dans son orbite.

II. Action de Steinitz (H₂G₂)

On s'intéresse ici à l'action de $Gl_m(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ définie par $(P, Q) \cdot M = PMQ^{-1}$.

Déf : Deux matrices dans une même orbite sont dites équivalentes.

1) Rang

Deux matrices équivalentes ont le même rang. On a également la réciproque.

Théorème (du rang) : Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang **DVLPT 1**

. **Corollaire** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dim finie : $\dim \ker u + \dim Im\, u = \dim E$.

. **Corollaire** : Toute orbite contient une unique matrice de la forme :
$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) Invariants de similitude. $\mathbb{K}$ commutatif. [Gourdon]

<u>Théorème</u> : E un $\mathbb{K}$-ev de dim n, $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe $F_1, \dots, F_r$ sev de E tels que, 0) F_i est stable par f, $\forall i \leq r$
1) $F_1 \oplus \dots \oplus F_r = E$
2) $\forall i$, $f_i = f|_{F_i}$ est cyclique : (i.e. $\exists x \in F_i$, $(x, f_i(x), \dots, f_i^{\dim F_i - 1}(x))$ soit une base de F_i.
3) Si $P_i = \Pi f_i$, alors $P_{i+1} | P_i$, $\forall i$

[Gourdon]

<u>Théorème</u> (Décomposition de Frobenius)
- La suite $(P_1, \dots, P_r)$ est un <u>invariant de similitude</u>
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M possède dans son orbite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$ où $C(P_i)$ est la matrice compagnon de P_i

→ Deux matrices sont semblables ssi elles ont mêmes invariants de similitude.

App : $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$, $A \underset{\mathbb{L}}{\sim} B \Rightarrow A \underset{\mathbb{K}}{\sim} B$, ($\mathbb{L}$ commutatif)

→ On peut retrouver la décomposition de Jordan, les coefficients de la suite i correspondent au degré des polynômes P_i.

IV. Action par congruence [H2G2]

Action du groupe $GL_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques : $P \cdot S = PS{}^tP$.

→ On dit que deux matrices sont congruentes, si elles sont dans la même orbite pour cette action.

→ Deux matrices congruentes représentent une même forme quadratique à changement de base près.

On définit $p(A) = \max\{\dim F, F \subset \mathbb{K}^n, \forall X \in F, {}^tXAX > 0\}$

1) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

<u>Théorème</u> : $A, A' \in S_n(\mathbb{C})$ sont dans la même orbite ssi elles sont de même rang.

→ On peut donner un représentant canonique de la forme

$\begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} =: I_r$

$Orb(I_n) = \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C})$

$Stab(I_n) = U(n)$

<u>Cas Hermitien</u> : $P \cdot A = PAP^*$

2) Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

<u>Théorème</u> : $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ sont congruentes ssi elles ont même rang et même invariant p. (Sylvester)

→ Toute matrice est congruente à une matrice $I_{p,r-p}$ de la forme $I_{p,r-p} := \begin{pmatrix} I_p & & (0) \\ & -I_{r-p} & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$. Le couple (r, p) est appelé <u>signature</u> de la forme quadratique associée à A.

<u>App</u> : Classification des coniques.

<u>Prop</u> : $S_n^{++}(\mathbb{R}) = Orb(I_n)$. La forme quadratique q associée à une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ s'écrit dans une certaine base $q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

- $\underset{\mathbb{R}}{Stab}(I_n) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}), P^tP = I_n\} =: O_n(\mathbb{R})$

<u>Théorème</u> : Tout sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{DVLT}}$

On regarde l'action de $T_s \times T_s \to GL_n(\mathbb{K})$ (T_s : triangulaires supérieures) telle que $(T_1, T_2) \cdot P = T_1 P T_2^{-1}$

- <u>Décomposition de Bruhat</u> : Dans toute orbite, il y a une unique matrice de permutation P_σ. [X-ENS Al]

<u>Corollaire</u> : $GL_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in S_n} T_s P_\sigma T_s$

→ Ici, le rang est un invariant trivial.

App: Soit $\mathbb{L}$ un surcorps de $\mathbb{K}$. Si deux matrices sont équivalentes sur $\mathbb{L}$, elles le sont sur $\mathbb{K}$ également.

App: Dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{F}_q)$, il y a $\displaystyle\prod_{d=0}^{r-1} \frac{(q^m-q^r)(q^n-q^d)}{(q^r-q^d)}$ matrices de rang r. $\boxed{\text{DVLT}_1}$

3) Topologie matricielle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note $\mathcal{O}_r$ l'orbite des matrices de rang r. ($r \leq \min(m,n)$) (H2G2)

Prop: $\overline{\mathcal{O}_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} \mathcal{O}_k$ (Union disjointe)

Corollaires:
- L'unique orbite fermée est $\mathcal{O}_0 = \{0\}$
- L'unique orbite ouverte est $\mathcal{O}_{\min(m,n)}$
- $Gl_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Sous action et invariant.

On peut regarder la sous-action relative au groupe $\mathcal{T}_n \times \mathcal{T}_n$. Le rang est un invariant mais il n'est pas total: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \not\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

III. Action ⊛ par conjugaison

On s'intéresse dans cette partie à l'action de $Gl_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $G \cdot M = GMG^{-1}$, avec $G \in Gl_n(\mathbb{K})$.

Deux matrices dans la même orbites sont dites *semblables*.

prop: Deux matrices semblables sont équivalentes.

$\rightarrow$ Deux matrices semblables ont même rang, mais la réciproque est fausse. ($I_n \not\sim 2I_n$)

1) Action sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$

$\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) := \bigcup_{D \text{ diagonale}} \mathcal{O}_D$ (H2G2)

Théorème: Deux matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à la même orbite si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres avec multiplicité.

$\rightarrow \mathcal{D}_n(\mathbb{C})/Gl_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$

rem: Le polynôme caractéristique (au signe près) est également un invariant total pour cette action.

Prop: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable ssi son orbite sous $Gl_n(\mathbb{C})$ est fermée.

2) Action sur $\mathcal{N}_n(\mathbb{R})$

$N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{R}) \iff N^n = 0$ matrices nilpotentes

On pose $a_i = \dim(N^i)$. On a $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = n \end{cases}$ et $a_{k+1} \geq a_k$

prop: $\forall k \geq 1$, $a_{k+1} - a_k \leq a_k - a_{k-1}$ $\rightarrow$ Pour chaque $N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$, on associe une suite

$\rightarrow$ On pose $\lambda_k = a_k - a_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$. $\lambda_N = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Théorème (Jordan). $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_n(\mathbb{C})$. (H2G2)

$N_1 \sim N_2 \iff \lambda_{N_1} = \lambda_{N_2}$

On pose $J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_k(\mathbb{C})$. J_k est nilpotente d'indice k

Corollaire: Toute orbite contient une unique (à permutation près des blocs) matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des J_k.

Ex: Soit $N \in \mathcal{N}_{10}(\mathbb{C})$ d'ordre 3 telle que $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10$

Alors $N \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & & & & (0) \\ & \boxed{3} & & & \\ & & \boxed{2} & & \\ & & & \boxed{1} & \\ (0) & & & & \boxed{1} \end{pmatrix} = J_\nu$ où $\nu = (3,3,2,1,1)$ est la partition duale de λ:

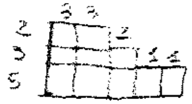

diagramme de Young

3) Cadre général : action sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a) Trigonalisation ($\mathbb{K}$)

Si χ_M est scindé, alors M contient dans son orbite une matrice par bloc :

$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_s \end{pmatrix}$ où $A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_i \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ — décomposition de Jordan.

$\rightarrow$ M et $2M$ sont semblables ssi M est nilpotente.

Corollaire. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, son orbite $\mathcal{O}_M$ contient une matrice triangulaire supérieure.

$\rightarrow$ Ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$ (d'Alembert Gauss).

On aurait pu parler de ... -représentat°

→ pr déf l'act° de Steinitz il faut que ça soit une <u>action</u>

→ Qui sont les gpts qui ont une orbite triviale sous l'act° par conjugaison?
(les homothéties)

→ $M \in M_n(\mathbb{R})$ $\Omega_M = \{AMA^{-1} / A \in Gl_n(\mathbb{C})\}$
$\Omega'_M = \{AMA^{-1} / A \in Gl_n(\mathbb{R})\}$

$Gl_n(\mathbb{R}) \subset Gl_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \Omega'_M \subseteq \Omega_M$

$\Omega_M \cap M_n(\mathbb{R}) \subset \Omega'_M$ car si 2 matrices st semblables sur $\mathbb{C}$ elles le st sur $\mathbb{R}$ ($A = H + iZ$, $P+ = H + tZ$)

$\boxed{\Omega_M \cap M_n(\mathbb{R}) = \Omega'_M}$

→ Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $Gl_n(\mathbb{R})$? Quels invariants.

<u>Rq</u>: En dim 2, le det et la trace caractérisent la classe de similitude de la matrice
(en dim ≥ 2, ça suffit pas mais ce st des invariants)

ATTENTION DS LE PLAN

<u>Plan</u>: - Faire plus apparaître la notion de NORMALISATION !
- On peut parler de conique / quadrique.

<u>Exos</u>:

- $A \in M_n(\mathbb{K})$. $\Omega_A = \{MAM^{-1} / M \in Gl_n(\mathbb{K})\}$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

<u>Mq $\mathring{\Omega}_A = \emptyset$</u> (Rmq : les sev st d'int vide)

- Tr et det sont des invariants $\{Tr = 0\}$ <u>hyp</u>
- Si $Tr(A) = 0$, $\Omega_A \subset \{Tr = 0\}$ hyp $\Rightarrow \mathring{\Omega}_A = \emptyset$
- Si $Tr(A) \neq 0$ $\{Tr = a\}$ <u>hyp affine</u>

<u>Rq A nilp $\Leftrightarrow 0_{M_n} \in \overline{\Omega_A}$</u>

<u>Quels sont les A tq Ω_A borné ?</u>

Si B non diag $\in \Omega_A$, $\exists i_0 \neq j_0$ tq $B_{i_0 j_0} \neq 0$.

$P_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ $(P_\lambda B P_\lambda^{-1})_{i_0 j_0} = \lambda (B)_{i_0 j_0}$

→ ∞ <u>NON</u>

Ω_A n'a que des matrices diag

Pr mq ce st des homothéties on prend une diag avec $\lambda \neq \mu$ et on conjugue pr trouver une pas diag (faire par blocs)

$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda+\mu \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right]$ pas diag

Les seules orbites bornées st celles de cardinal 1.

Livres Marc Sage. Topo Mat.

Dénombrement des matrices de rang r sur un corps fini

Réf : Caldero-Germoni (H_2G_2). Tome 1

Leçons 150, 151, 190 pour les I, 104 ?
101, 150, 151, 190 pour les non I.
Bof 123 car peu d'arguments de corps finis.

Pté Soit n, m, r trois entiers positifs tels que $n>0, m>0$, $r<\min(m,$
Notons $A_r = \{M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F}_q) \mid \text{rang}(M) = r\}$.
On a alors $|A_r| = \prod_{d=0}^{r-1} \frac{(q^m - q^d)(q^n - q^d)}{(q^r - q^d)}$

Plan : 1) MQ A_r est une orbite sous une action que l'on introduira, dite action de Steinitz.

2) Sachant que si $G \circlearrowright X$ et $x \in X$, alors $\Omega x \underset{bij}{\simeq} G/\text{Stab}\, x$ (orbite de x),
on a $|A_r| = \frac{|G|}{|\text{Stab}_{J_r}|}$ pour $J_r \in A_r$.

Calculons donc Stab_{J_r}.

3) Calculons encore pour conclure.

1) $\begin{pmatrix} Gl_m(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{B}ij(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) \\ (P, Q) \longmapsto (M \longmapsto PMQ^{-1}) \end{pmatrix}$ est un morph. de grp.

Donc $G = Gl_m(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par $(P,Q) \cdot M = PMQ^{-1}$.
On appelle cette action, l'action de Steinitz.

Les classes pour cette action correspondent aux différentes façon d'écrire un même morphisme de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ dans différentes bases.

(Plus exactement si on fixe $\mathcal{B}_1$ base de $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}_2$ base de $\mathbb{K}^m$, on peut voir $P \in Gl_m(\mathbb{K})$ comme une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}_2'$ à $\mathcal{B}_2$
$Q^{-1} \in Gl_n(\mathbb{K})$ ——— de $\mathcal{B}_1$ à une base $\mathcal{B}_1'$
alors si $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} \varphi$ et $A = PBQ^{-1}$, $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1', \mathcal{B}_2'} \varphi$.)

En particulier si $A \simeq B$ il est clair qu'elles ont m̂ rang, celui d'une application qu'elles dénotent.

On pouvait aussi, du point de vue matriciel, dire que multiplier à gauche ou à droite par une mat. inversible n'affecte pas le rang.

Réciproquement si $rg(A) = rg(B) = r$ on veut MQ $A \simeq B$.

On va plutôt MQ $A \simeq J_r := \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. où $I_r = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$
puisque de m̂ on aura $B \simeq J_r$ et par symétrie puis transitivité $A \simeq B$.

On introduit φ_A tq $A = \mathrm{Mat}_{\text{Base canonique}}\, \varphi_A$.

On peut décomposer $\mathbb{K}^n = F \oplus \mathrm{Ker}\, A$
$= F \oplus \mathrm{Ker}\, \varphi_A$. (existence par le th. de la base incomplète à partir d'une base de Ker A)

Ainsi $\varphi_{A/F}$ est injective (★).

Considérons $(v_i)_{i \in [1..n]}$ une base adaptée à cette décomposition et disons que $F = \langle v_1, \dots, v_s \rangle$.

On pose alors $(w_1 — w_s) = (\varphi_A(v_1) — \varphi_A(v_s))$.

Par ★, $(w_1 - w_s)$ est libre, on la complète en $(w_1 — w_m)$ base de $\mathbb{K}^m$.

On a $r = rg(A) = rg(\varphi_A) = \dim(\varphi_A(E)) = \dim(\varphi_A(F)) \overset{★}{=} \dim(F) = s$.

Donc $\forall i \in [1..r]\ \varphi_A(v_i) = w_i$
$\forall i \in [r+1..s]\ \varphi_A(v_i) = 0$ Donc $\mathrm{Mat}_{v,w}\, \varphi_A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = J_r$.

D'où $\underline{A \simeq J_r}$ « <u>les orbites de l'ac° de Steinitz sont caractérisés par le rg.</u> »

2) Quitte à calculer le stabilisateur d'un élément on choisit de calculer celui de J_r qui est plus simple.

$(P, Q) \in \mathrm{Stab}\, J_r$ ssi $P J_r Q^{-1} = J_r$ ssi $P J_r = J_r Q$

ssi $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$) en notant $P = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$ $Q = \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right)$

ssi $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ssi $A = A'$, $B' = 0$, $C = 0$

Donc $\mathrm{Stab}_{J_r} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right), \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C' & D' \end{array}\right) \mid A \in GL_r(\mathbb{K}),\ D \in GL_{m-r}(\mathbb{K}),\ D' \in GL_{n-r}(\mathbb{K}),\ B \in \mathcal{M}_{r,m-r}(\mathbb{K}),\ C' \in \mathcal{M}_{m-r,r}(\mathbb{K}) \right\}$

3) Ramenons nous au cas $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ où alors on a $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{d=0}^{n-1}(q^n - q^d)$ (choix de chacune des colonnes, non colinéaires aux d premières)

Donc $|A_r| = |\Omega_{J_r}| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}_{J_r}|} = \dfrac{|GL_n(\mathbb{F}_q)| \times |GL_m(\mathbb{F}_q)|}{|GL_r(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{m-r}(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{n-r}(\mathbb{F}_q)| \times q^{r \times (m-r)} \times q^{(n-r) \times r}}$

$$= \frac{\prod_{d=0}^{n-1}(q^n - q^d) \times \prod_{d=0}^{m-1}(q^m - q^d)}{\prod_{d=0}^{r-1}(q^r - q^d) \times \underbrace{(q^r)^{m-r} \times \prod_{d=0}^{m-r-1}(q^{m-r} - q^d)}_{= \prod_{d=0}^{m-r-1}(q^m - q^{d+r}) = \prod_{d=r}^{m-1}(q^m - q^d)} \times \underbrace{(q^r)^{n-r} \times \prod_{d=0}^{n-r-1}(q^{n-r} - q^d)}_{= \prod_{d=0}^{n-r-1}(q^n - q^{d+r}) = \prod_{d=r}^{n-1}(q^n - q^d)}}$$

$$= \frac{1}{\prod_{d=0}^{r-1}(q^r - q^d)} \times \prod_{d=0}^{r-1}(q^m - q^d) \times \prod_{d=0}^{r-1}(q^n - q^d)$$

$$= \prod_{d=0}^{r-1} \frac{(q^m - q^d)(q^n - q^d)}{(q^r - q^d)}$$

Sous-groupes compacts de $Gl_n(\mathbb{R})$

Références [A] Alessandri, Thèmes de géométrie. p141/160.
[T] Tauvel, Cours de Géométrie (1ère éd. Dunod), p77

Leçons .

.

NB ⚠ Le développement est à adapter en fonction des leçons.
J'ai ici découpé en parties inégales mais cohérentes il me semble, de sorte que l'une ou l'autre puisse ê admise selon la leçon.

1) Un corollaire utile du lemme de Carathéodory. [T] p77.

Carathéodory : Dans un $\mathbb{R}$-EV E de dimension finie n, l'enveloppe convexe d'une partie $A \subset E$ s'écrit comme l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ points de A.

Preuve 1). L'ensemble des combinaisons convexes de points de A forme un convexe — par associativité du barycentre si l'on veut — qui contient A, et donc contient néc l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(A)$.
Réciproquement un ensemble contenant A mais pas l'une de ces comb. convexes ne saurait être convexe, donc ts les cvx contenant A contiennent ces points, donc $\mathrm{Conv}(A)$ les contient.

Par double inclusion on peut écrire $\mathrm{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i \;\middle|\; \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ \forall i \in [1..k]\ a_i \in A,\ \lambda_i \in [0,1] \\ \sum \lambda_i = 1 \end{array} \right\}$

2) Montrons maintenant qu'on peut se restreindre aux comb. cvx de $n+1$ points.
Si $x \in \mathrm{Conv}(A)$ s'écrit $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$, et que $k > n$ (sinon rien à faire).
La famille de vecteurs $(v_i)_{i \in [1..k]} = (\overrightarrow{a_0 a_i})_{i \in [1..k]}$ est alors néc. liée car de cardinal supérieur à la dimension de l'espace.
Donc il existe $(\mu_i)_{i \in [1..k]}$ tel que $\sum \mu_i v_i = 0$.
On pose alors $\gamma_0 = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$ et $\forall i \in [1..k]$ $\gamma_i = -\mu_i$.
Ainsi $\sum_{i=0}^{k} \gamma_i = +\sum_{i=1}^{k} \mu_i + \sum_{i=1}^{k} -\mu_i = 0$
Donc (lemme d'existence du barycentre) $\forall m \in E$, $\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \overrightarrow{m a_i} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \overrightarrow{a_0 a_i} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \overrightarrow{a_0 a_i} =$
En posant $\alpha = \min\left\{ \frac{\lambda_i}{\gamma_i} \mid i \in [0..k],\ \gamma_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_{i_0}}{\gamma_{i_0}}$ on a alors

→ $\sum_{i=0}^{k} (\lambda_i - \alpha\gamma_i) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i - \alpha \sum_{i=0}^{k} \gamma_i = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$

→ $\lambda_{i_0} - \alpha\gamma_{i_0} = \lambda_{i_0} - \frac{\lambda_{i_0}}{\gamma_{i_0}} \gamma_{i_0} = 0$ donc $\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k} (\lambda_i - \alpha\gamma_i) = 1$.

→ $\overrightarrow{a_{i_0} x} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k} \lambda_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i} + \alpha \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \gamma_i \overrightarrow{a_{i_0} a_i}}_{= \vec{0}} = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq i_0}}^{k} (\lambda_i + \alpha\gamma_i) \overrightarrow{a_{i_0} a_i}$

Donc $x = \mathrm{bar}(a_i, \lambda_i + \alpha\gamma_i)_{i \in [0..k] \setminus i_0}$. On s'est ramené à un barycentre de $k-1$ pt.
En itérant on écrit x comme barycentre de $n+1$ points.

Pté [L'enveloppe convexe d'un compact est compacte (dans un $\mathbb{R}$-EV de dim. finie) [A] p 160

Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension n. Soit K un compact de E. Notons $C = \mathrm{Conv}(K)$.
Par le lemme de Carathéodory $C = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i k_i \mid (\lambda_i)_{i\in[0..n]} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \sum \lambda_i = 1 \text{ et } (k_i)_{i\in[0..n]} \in K^{n+1} \right\}$

Autrement dit $C = \varphi(K^{n+1} \times \Lambda_{n+1})$ où $\varphi = \begin{pmatrix} K^{n+1} \times \Lambda_{n+1} & \longrightarrow & E \\ (k_i)\ (\lambda_i) & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} \lambda_i k_i \end{pmatrix}$ continue,

et $\Lambda_{n+1} = \left\{ (\lambda_i)_{i\in[0..n]} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum \lambda_i = 1 \right\}$

Λ_{n+1} est compact (car fermé borné en dim. finie)
K^{n+1} et donc $K^{n+1} \times \Lambda_{n+1}$ le sont en tant que produit de compact.
Donc C est compact comme image continue d'un compact.

2) Un lemme de point fixe

Pté [Soit E un $\mathbb{R}$-EV de dimension finie. Soit $\widehat{G}$ un sous-groupe de $GL(E)$. Soit $K \subset E$.

Si $\begin{cases} \widehat{G} \text{ est compact} \\ K \text{ est convexe compact} \\ \forall \hat{g} \in \widehat{G},\ \hat{g}(K) \subset K \end{cases}$, alors K admet un point $\widehat{G}$-fixe.
(ie il existe $k_0 \in K$ tq $\forall \hat{g} \in G$, $\hat{g}(k) = k$).

L'idée ici est de construire une norme $\widehat{G}$-invariante et strictement convexe.
La stricte convexité assurera que K admet un unique point de norme minimale, et la $\widehat{G}$-invariance assurera que ce point est un point $\widehat{G}$-fixe.

1) Soit N une norme euclidienne sur E. On pose $N' = \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \max_{\hat{g}\in\widehat{G}} N(\hat{g}(x)) \end{pmatrix}$

Elle est bien définie car l'ensemble $\{ N(\hat{g}(x)) \mid \hat{g} \in \widehat{G} \}$ est compact pour tout $x \in E$, (comme image du compact $\widehat{G}$ par $\varphi_x = \begin{pmatrix} \widehat{G} \to \mathbb{R}^+ \\ \hat{g} \mapsto N(\hat{g}(x)) \end{pmatrix}$ continue), et admet donc bien un maximum.

N' est homogène car N l'est
N' est à valeur dans $\mathbb{R}^+$ car N l'est
N' est défini* car N l'est et parce que les $\hat{g} \in G$ sont inversibles.
N' vérifie l'inégalité triangulaire, car N aussi et que $\max(\Sigma) \leq \Sigma \max$

] N' est une norme sur E.

$\forall x \in E, \forall \hat{g}_0 \in \widehat{G},\ N'(\hat{g}_0(x)) = \max_{\hat{g}\in\widehat{G}} N(\hat{g} \circ \hat{g}_0(x)) = \max_{\hat{g}'\in\widehat{G}} N(g'(x)) = N'(x)$.
Donc N' est $\widehat{G}$-invariante

Soit $(x,y) \in E^2$. Il existe $\hat{g}_0 \in \widehat{G}$ tq $N'(x+y) = N(\hat{g}_0(x+y)) = N(\hat{g}_0(x) + \hat{g}_0(y)) \leq N(\hat{g}_0(x)) + N(\hat{g}_0(y)) \leq N'(x) + N'($
Donc si $N'(x+y) = N'(x) + N'(y)$, alors $N(\hat{g}_0(x) + \hat{g}_0(y)) = N(\hat{g}_0(x)) + N(\hat{g}_0(y))$.
Or puisque N est euclidienne cette égalité dans l'inégalité triangulaire implique que $\hat{g}_0(x)$ et $\hat{g}_0(y)$ sont positivement liés, donc x et y le sont aussi (car $\hat{g}_0 \in GL(E)$).
(Cela équivaut à dire que N' est strictement convexe)

* définie comme dans "définie positive". se vaut 0 en 0

2) Par compacité de K on sait qu'il existe $k_0 \in K$ de norme N' minimale.
Si $k_1 \in K$ tel que $N'(k_1) = N'(k_0)$ on a

$$N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) \leq N'\left(\frac{k_0}{2}\right) + N'\left(\frac{k_1}{2}\right) = \frac{N'(k_0)}{2} + \frac{N'(k_1)}{2} = N'(k_0)$$

Or par convexité de K $\frac{k_0+k_1}{2} \in K$, donc $N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) \geq N'(k_0)$ par minimalité de $N'(k_0)$.

Finalement on a $N'\left(\frac{k_0+k_1}{2}\right) = N'(k_0) = N'\left(\frac{k_0}{2}\right) + N'\left(\frac{k_1}{2}\right)$.

Par "stricte convexité" de N' $\frac{k_0}{2}$ $\frac{k_1}{2}$ sont donc positivement liés, donc k_0 et k_1 aussi.
Or k_0 et k_1 sont de m̂ norme. Donc $k_0 = k_1$. D'où l'unicité

3) Puisque N' est $\widehat{G}$-invariante on a $\forall \hat{g} \in \widehat{G}$, $N'(\hat{g}(k_0)) = N'(k_0)$.
Par l'unicité du point de norme minimale dans K, on a $\forall \hat{g} \in \widehat{G}$, $\hat{g}(k_0) = k_0$.
On a bien exhibé un point $\widehat{G}$-fixe dans K

3) La propriété principale

Pté Si G est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$, alors G est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.

On pose $\rho : \begin{pmatrix} G \to GL(S_n(\mathbb{R})) \\ A \mapsto (S \mapsto {}^tASA) \end{pmatrix}$ (ρ est un morphisme de groupe de $(G, \square)$ dans $GL(S_n(\mathbb{R}))$ où $\square = \begin{pmatrix} G^2 \to G \\ A,B \to BA \end{pmatrix}$)

C'est une action de groupe de G sur $S_n(\mathbb{R})$, et puisque l'action de $g \in G$ est un automorphisme (linéaire), c'est m̂ une représentat° de G sur l'EV $S_n(\mathbb{R})$.

C'est bien défini car $\forall A \in G$, $\forall S \in S_n(\mathbb{R})$, ${}^t({}^tASA) = {}^tA\,{}^tS\,{}^{tt}A = {}^tASA$ dc ${}^tASA \in S_n(\mathbb{R})$.

ρ est continue car polynomiale

Pour avoir une base plus agréable on étend l'action de G à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, aut. dit on considère $\hat{\rho} \begin{pmatrix} G \to GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ A \mapsto (M \mapsto {}^tAMA) \end{pmatrix}$.
On note $\mathcal{B} = (E_{i,j})_{(i,j) \in [1..n]^2}$ la base canonique des mat. élément
Pour $A \in G$ on a

$$\begin{aligned} Mat_{\mathcal{B}}\, \hat{\rho}(A) &= \left(({}^tA E_{k,l} A)_{i,j}\right)_{((i,j),(k,l)) \in ([1..n]^2)^2}. \\ &= \left(\sum_{u=1}^{n} {}^tA_{i,u} (E_{k,l}A)_{u,j}\right) \ldots \\ &= \left(\sum_{u=1}^{n} A_{u,i} \sum_{v} \delta_{k,u} \delta_{l,v} A_{v,j}\right) \ldots \\ &= (A_{k,i} \times A_{l,j}) \ldots \end{aligned}$$

On pose $\widehat{G} = \rho(G)$. C'est un sous groupe compact de $GL(E)$ où $E = S_n(\mathbb{R})$ car c'est l'image d'un groupe compact par un morphisme de grp. continu.

On note Ω_{I_n} l'orbite de I_n sous l'action de G.

On a $\Omega_{I_n} = \{{}^tAA \mid A \in G\} = \varphi(G)$ où $\varphi = \begin{pmatrix} G \to S_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto {}^tAA \end{pmatrix}$ continue, donc Ω_{I_n} compact et $\subset S_n^{++}(\mathbb{R})$

On pose $K = \text{Conv}(\Omega_{I_n})$, ainsi K est un convexe compact de $E = S_n(\mathbb{R})$, et comme $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe on a en outre $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$

Pour pouvoir appliquer le lemme il reste à vérifier que pour $\hat{g} \in \hat{G}$, $\hat{g}(K) \subset K$.
Puisque les éléments de K s'écrivent comme combinaison convexe (a fortiori comb. linéaire) d'éléments de Ω_{I_n} et que les élém^ts de $\hat{G}$ sont linéaires il suffit de MQ $\hat{G}$ stabilise Ω_{I_n}.

Soit $\hat{g} \in \hat{G}$. Il existe $A \in G$ tel que $\hat{g} = \rho(A)$.
Soit ${}^tBB \in \Omega_{I_n}$.
On a $\hat{g}({}^tBB) = \rho(A)({}^tBB) = {}^tA\,{}^tBBA = {}^t(BA)BA \in \Omega_{I_n}$

Donc Ω_{I_n} est $\hat{G}$ stable, donc K est aussi $\hat{G}$ stable.

D'après le lemme il existe donc $k \in K$ qui est $\hat{G}$-fixe.
Puisque $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $k = S^2$.

Alors $\forall A \in G$, $\rho(A)(k) = k$ soit ${}^tASSA = SS$ soit $S^{-1}\,{}^tAS\,SAS^{-1} = I_n$
or $S \in S_n(\mathbb{R})$ donc $\begin{cases} S^{-1} = {}^tS^{-1} \\ S = {}^tS \end{cases}$ donc ${}^t(SAS^{-1})SAS^{-1} = I_n$, ie $SAS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.

Donc $SGS^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ (Et puisque la conjugaison dans $GL_n(\mathbb{R})$ est un automorphisme de groupe SGS^{-1} est bien un sous groupe)

Rq Une approche quadratique.

Rappel
$O_n(\mathbb{R}) = O(I_n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\} = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ \langle MX|MX\rangle = {}^tX\,{}^tMMX = {}^tXX = \langle X|X\rangle\}$
$O(q) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMQM = Q\} = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall X \in \mathbb{R}^n \ \langle MX|MX\rangle_q = {}^tX\,{}^tMQMX = {}^tXQX = \langle X|X\rangle_q\}$
pour q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et $\langle\,|\,\rangle_q$ le produit scalaire associé.
Q sa matrice dans la base canonique.

J'ai dis qu'on a $\rho(A)(k) = k$ on a ${}^tAkA = k$ soit $A \in O(k)$
Cela explique a posteriori qu'on ait étudié ρ: les point fixes par $\rho(G)$ contenait néc G dans leur groupe orthogonal.