EXEMPLES D'ACTIONS DE GROUPES SUR LES ESPACES DE MATRICES.

150

I. ACTIONS DE GROUPES : L'EXEMPLE DE L'ACTION PAR TRANSLATION.

1. ACTIONS DE GROUPES.

H.G p.11 **Def 1** : Soit G un groupe et X un ensemble. On appelle action à gauche de G sur X une application $\alpha : G\times X \to X$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ telle que :

1. $\forall (g,g')\in G$, $\forall x\in X$, $g\cdot(g'\cdot x) = (gg')\cdot x$.
2. $\forall x\in X$, $e\cdot x = x$ (e est le neutre de G).

Ex 2 : (Action par translation) : $GL_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(P,A)\longmapsto PA$

Def 3 : Un invariant pour une action de groupe est une application définie sur l'ensemble sur lequel le groupe opère qui est constante sur chaque orbite. Un invariant est dit complet si sur 2 orbites distinctes, il prend 2 valeurs différentes. Q1 : c'est faux.

Ex 4 : Pour l'action précédente, le rang est un invariant complet.

Prop 5 : Une matrice est inversible ssi I_d est dans l'orbite pour l'action par translation.

Def 6 : Dans une orbite, on peut choisir de manière arbitraire un élément qui la représente. Cet élément est appelé représentant.
Un système de représentants est la donnée d'un représentant pour chaque orbite de l'action.

2. CHOIX D'UN SYSTÈME DE REPRÉSENTANTS.

H.G p.130
- Dans le cas de l'action par translation, on dispose d'un algorithme effectif : le pivot de Gauss.

Def 7 : On appelle pivot d'une ligne non nulle, le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en ligne lorsqu'elle vérifie :
1) si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles,
2) le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.

De plus elle est dite réduite si tous les pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Ex 8 : (Matrice échelonnée réduite) : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Thm 9 : Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en ligne réduite.

Rq 10 : Cette matrice s'obtient par la méthode du pivot de Gauss en multipliant à gauche par des matrices inversibles correspondant à des opérations élémentaires (dilatations, transvections, permutations). ANNEXE

Prop 11 : Un système de représentant pour l'action par translation est l'ensemble des matrices échelonnées réduites.

Appli 12 : Calcul du rang d'une matrice.

Appli 13 : Calcul de l'inverse d'une matrice.

Appli 14 : (Factorisation LU d'une matrice) : Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n telle que les n sous-matrices diagonales soient inversibles. Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L=(l_{ij})$ avec $l_{ii}=1$ et une matrice triangulaire supérieure U telles que $A=LU$. Cette factorisation est unique. GRO

Ex 15 : $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4/5 & -9/20 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 9/4 \end{pmatrix}$

Appli 16 : Résolution de systèmes linéaires

- Le choix judicieux d'un représentant permet de prouver certaines propriétés : l'exemple de la décomposition polaire. MT

Lemme 17 : $\forall A\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\exists ! S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A=S^2$.

Prop 18 : (Décomposition polaire) : Soit $\phi : O_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $(O,M)\longmapsto M^tO$.
Alors chaque orbite contient une matrice $S\in S_n^{+}(\mathbb{R})$. De plus, si $M\in GL_n(\mathbb{R})$, alors : $\exists ! S\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans l'orbite de M.

Corollaire 19 : $GL_n(\mathbb{R})$ est homéomorphe à $O_n(\mathbb{R})\times S_n^{++}(\mathbb{R})$.

$M_2 6_2$, p83

II. DESCRIPTION DES ORBITES : L'EXEMPLE DE L'ACTION PAR CONJUGAISON ET PAR ÉQUIVALENCE.

1. RÉDUCTION D'ENDOMORPHISME.

Ex 20 : (Action par conjugaison) : $GL_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$
$(P, M) \longmapsto PMP^{-1}$

Prop 21 : Deux matrices sont semblables ssi elles sont dans la même orbite pour l'action précédente.

Ex 22 : le déterminant, le polynôme minimal, caractéristique, le spectre sont des invariants.

Thm 23 : Une matrice est diagonalisable ssi elle est dans la même orbite qu'une matrice diagonale.

Prop 24 : Pour l'action restreinte de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $D_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices diagonalisables), le polynôme caractéristique forme un invariant complet et un système de représentants est donné par les matrices diagonales.

C-Ex 25 : Le polynôme minimal est un invariant qui n'est pas complet : $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

Appli 26 : Résolution d'un système de suites récurrentes :
$\begin{cases} u_{m+1} = u_m - v_m \\ v_{m+1} = 2u_m + 4v_m \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_m = 5\cdot 2^m - 3\cdot 3^m \\ v_m = -5\cdot 2^m + 6\cdot 3^m \end{cases}$

Rq 27 : De même, une matrice est trigonalisable ssi elle est dans l'orbite d'une matrice triangulaire.

Prop 28 : Pour l'action restreinte de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $T_n(\mathbb{C})$ (l'ensemble des matrices trigonalisables), toute matrice $T \in T_n(\mathbb{C})$ est dans l'orbite d'une matrice sous la forme de Jordan : c'est-à-dire
$J = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & \ddots A_s \end{pmatrix}$ où $\forall i$ $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{i,1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{i,m} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$ avec $\varepsilon_{i,j} \in \{0, 1\}$,
et $(\lambda_i)_i$ les valeurs propres de T.

Rq 29 : Les formes de Jordan forment un système de représentants.

Appli 30 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Alors M et $2M$ sont semblables ssi M est nilpotente dans $M_n(\mathbb{C})$.

Thm 31 : Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, on note f l'endomorphisme associé ($f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$). Il existe une suite $F_1, \dots, F_r$ de s.e.v de $\mathbb{C}^n$ tous stables par f telle que
1) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
2) Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $f_i = f_{|F_i}$ est un endomorphisme de F_i cyclique.
3) Si P_i désigne le polynôme minimal de f_i on a $P_{i+1} | P_i$ $\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$.

La suite des P_i ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Prop 32 : Réduction de Frobenius.
Si $P_1, \dots, P_r$ désigne la suite des invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base $\mathcal{B}$ de E tq
$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$ où les $C(P_i)$ sont les matrices compagnons.

Coro 33 : Les invariants de similitude forment un invariant complet pour l'action de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $M_n(\mathbb{C})$. De plus on a un système de représentants donné par les réduites de Frobenius.

Appli 34 : Toute matrice est semblable à sa transposée.

2. ALLURE DES ORBITES

Ex 35 : (Action par équivalence) $GL_m(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ $M_1 6_2$ p4
$((P, Q), A) \longmapsto PAQ^{-1}$

Thm 36 : Théorème du rang : Deux matrices A et B de $M_{m,n}(\mathbb{R})$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même rang.

Prop 37 : Le rang est un invariant complet et un système de représentants est l'ensemble des $(J_r)_{1 \leq r \leq \min(m,n)}$
où $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

Appli 38 : Cardinal de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ et celui des matrices de rang r.

Prop 39 : $D_n(\mathbb{K})$ est dense dans $T_n(\mathbb{K})$ (Topologie des orbites)

Rmq 40 : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $T_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$.
Mais $T_n(\mathbb{R})$ est un fermé distinct de $M_n(\mathbb{R})$.

Thm : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{F}_q$ le corps à $q = p^{\alpha}$ éléments, p premier, $\alpha > 0$.
Alors avec la convention $|GL_0(\mathbb{F}_q)| = 1$
DEV On a $|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_q = n \\ m_1, \dots, m_q \geq 0}} \left[|GL_n(\mathbb{F}_q)| \Big/ \prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)| \right]$

REF 9

H_2G_2 p150

cf 60

III. ÉTUDE DES STABILISATEURS : L'EXEMPLE D'UNE ACTION INFIDÈLE, L'ACTION PAR CONGRUENCE

Cadre : Dans cette partie, la caractéristique du corps $\mathbb{K}$ est différente de 2. On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques

1) RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES.

Ex 41 : (Action par congruence)

$$GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \longrightarrow S_n(\mathbb{K})$$
$$(P, S) \longmapsto PS\,{}^tP$$

Déf 42 : On dit que deux matrices sont congruentes si et seulement si elles appartiennent à la même orbite pour l'action de congruence.

Prop 43 : Deux matrices sont congruentes si et seulement si elles sont les matrices de la même forme quadratique dans des bases différentes

Déf 44 : Le discriminant d'une forme quadratique non dégénérée q (ou de la forme bilinéaire symétrique associée) est le déterminant de n'importe laquelle des matrices de q modulo les carrés non nuls

Prop 45 : Le discriminant est un invariant pour l'action de congruence.

Thm 46 : Soit (E, q) un espace vectoriel de dimension finie, $E \neq \{0\}$, muni d'une forme quadratique q. Il existe alors sur E des bases orthogonales pour q. C'est-à-dire il existe toujours une base $\{e_i\}$ telle que si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ alors $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$ avec $a_i \in \mathbb{K}$ et $r = \mathrm{rang}(q)$.

Appli 47 : Recherche d'une base orthogonale pour q par la méthode de Gauss.

Ex 48 : $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$

La réduction de Gauss donne $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_2 + 2x_3)^2 - x_3^2$

Rmq 49 : Dans le cas réel toute forme quadratique peut s'écrire dans une certaine base sous la forme $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & (0) \end{pmatrix} =: I_{p,q}$

Déf 50 : On appelle signature d'une forme quadratique le couple (p, q) de la remarque précédente.

Thm 51 : i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ deux matrices $A, A' \in S_n(\mathbb{C})$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même rang

ii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ deux matrices $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont la même signature.

iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ ($q = p^n$, $p \neq 2$, $n > 0$) deux matrices inversibles $A, A' \in S_n(\mathbb{F}_q)$ sont dans la même orbite si et seulement si elles ont le même discriminant.

Rmq 52 : Le rang, la signature et le discriminant sont des invariants complets respectivement dans les cas précédents.

Appli 53 : Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une forme quadratique q définie positive sur $\mathbb{R}^n$ tq $G \subset O(q)$.

2) ÉTUDE DES STABILISATEURS

Déf 54 : On appelle groupe orthogonal réel d'ordre n le groupe défini par $O(n) := \mathrm{Stab}(I_n) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}),\ P\,{}^tP = I_n\}$. H_2G_2 p55

Déf 55 : On définit le groupe des isométries d'une forme quadratique de signature (p, q) comme étant le groupe :

$O(p,q) := \mathrm{Stab}(I_{p,q}) = \{P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $P I_{p,q} {}^tP = I_{p,q}\}$.

lorsque $n = p + q$ (forme quadratique non dégénérée)

Thm 56 : Soit $p, q \in \mathbb{N}^* \setminus \{(0,0)\}$. Il existe un homéomorphisme H_2G_2

DEV $O(p,q) \cong O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$ p211

Ref Caldero-Germoni H2G2.
Hmeimmé - Testard
Grifone
Gourdon

Développement : Nombre de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$

Théorème 0.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{F}_q$ le corps à $q = p^r$ éléments, p premier et $r \geq 0$. On note $D_n(q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(q) := M_n(\mathbb{F}_q)$. Alors, avec la ~~convention~~ $|GL_0(q)| = 1$, on a :

$$|D_n(q)| = \overset{\sum}{\cancel{\prod_{\substack{m_1,\ldots,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+\ldots+m_q=n}}}} \frac{|GL_n(q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(q)|}.$$

Démonstration. On a par définition :

$$D_n(q) = \{PDP^{-1} | D \in M_n(q) \text{ diagonale et } P \in GL_n(q)\}.$$

Donc $GL_n(q)$ agit <u>par conjugaison</u> sur $D_n(q)$. On a alors pour $M \in D_n(q)$:

$$\text{Orb}(M) = \{PMP^{-1} | P \in GL_n(q)\},$$
$$\text{et } \text{Stab}(M) = \{P \in GL_n(q) | PMP^{-1} = M\}.$$

On introduit alors des notations. Soit χ <u>un polynôme scindé sur $\mathbb{F}_q$</u> <u>unitaire</u> : $\boxed{\chi = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}}$ avec les λ_i deux à deux distincts dans $\mathbb{F}_q$ et $m_i \geq 0$. On définit alors la matrice $D_\chi := \text{diag}(\lambda_i I_{m_i})_{1 \leq i \leq r}$ par bloc. On pose :

$$\text{Scal}_n := \{D_\chi | \chi \text{ polynôme scindé sur } \mathbb{F}_q \text{ unitaire de degré } n\}.$$

On a alors que $\boxed{D_n(q) = \bigsqcup_{D \in \text{Scal}_n} \text{Orb}(D)}$.
En effet, si $D \in D_n(q)$, alors D est semblable à une matrice diagonale, qui est dans Scal_n quitte à permuter les vecteurs de la base pour ordonner les valeurs propres. Donc on a $D_n(q) = \bigcup_{D \in \text{Scal}_n} \text{Orb}(D)$. Soient χ, ψ deux polynômes scindes sur $\mathbb{F}_q$ unitaire de degré n tels que $D_\chi \in \text{Orb}(D_\psi)$. Alors D_χ est semblable à D_ψ et ont même polynôme caractéristique, donc $\chi = \psi$: l'union est disjointe.
En passant au cardinal, on a :

$$|D_n(q)| = \sum_{D \in \text{Scal}_n} |\text{Orb}(D)|.$$

On utilise ensuite la relation orbite-stabilisateur :

$$|D_n(q)| = \sum_{D \in \text{Scal}_n} \frac{|GL_n(q)|}{|\text{Stab}(M)|}.$$

On cherche alors le cardinal du stabilisateur d'un éléments de Scal_n :

$$(P \in \text{Stab}(D)) \iff (PDP^{-1} = D)$$
$$\iff (PD = DP \text{ et } P \in GL_n(q))$$

En notant $C(D)$ le commutant de D, on en déduit $\text{Stab}(D) = C(D) \cup GL_n(q)$.
Si P commute avec D, alors les sous-espaces propres de D sont stables par P. Donc $P = \text{diag}(P_1, \ldots, P_r)$ avec $P_i \in GL_{m_i}(q)$, $1 \leq i \leq r$. Réciproquement, on peut vérifier par le calcul que P de cette forme commutent avec D. On en déduit que :

$$|D_n(q)| = \sum_{D \in \text{Scal}_n} \frac{|GL_n(q)|}{\prod_{i=1}^{r} |GL_{m_i}(q)}.$$

Cette formule est indexée sur les valeurs propres des matrices D ce qui n'est pas très pratique, on va la réindexer et ainsi obtenir la formule annoncée. Par construction de l'ensemble Scal_n, on a :

$$\mathrm{Scal}_n \cong \{\text{polynômes scindes sur } \mathbb{F}_q \text{ unitaire de degrés } n\}.$$

En notant $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, ..., \alpha_q\}$, on a qu'un polynôme scindé sur $\mathbb{F}_q$ est de la forme $\prod_{i=1}^{q}(X - \alpha_i)^{m_i}$ avec $m_1, ..., m_q \in \mathbb{N}$. Dire que le polynôme est de degré n, c'est ajouter la condition $m_1 + ... + m_q = n$, ce qui nous donne :

$$|D_n(q)| = \prod_{\substack{m_1,...,m_q \in \mathbb{N} \\ m_1+...+m_q=n}} \frac{|GL_n(q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{m_i}(q)|}.$$

$\square$

Développement : Etude du groupe $O(p,q)$.

Notations : Pour $p,q \in \mathbb{N}$, $O(p,q)$ désigne le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{p+q}$, de signature (p,q) :

$$q(x) = x_1^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_{p+q}^2.$$

On note $I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base canonique.

On rappelle que $M \in O(p,q) \Leftrightarrow MI_{p,q}{}^tM = I_{p,q}$. On note $O(p)$ le groupe $O(p,\mathbb{R})$.

Théorème 0.1

Soient $p,q \geq 1$.

Il existe un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Démonstration.

Posons $n = p+q$. Soit $M \in O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

Par la décomposition polaire, $M = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrons que $O, S \in O(p,q)$.

Posons $T := {}^tMM = S^2$. Or :

$$\begin{aligned} M \in O(p,q) &\Leftrightarrow MI_{p,q}{}^tM = I_{p,q} \\ &\Leftrightarrow {}^tM^{-1}I_{p,q}M^{-1} = I_{p,q} \\ &\Leftrightarrow {}^tM^{-1} \in O(p,q) \\ &\Leftrightarrow {}^tM \in O(p,q). \end{aligned}$$

Donc $S^2 = T = {}^tMM \in O(p,q)$.

Comme $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et sachant que $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est surjective, il existe $U \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp U$.

Alors :

$$\begin{aligned} T \in O(p,q) &\Leftrightarrow TI_{p,q}{}^tT = I_{p,q} \\ &\Leftrightarrow {}^tT = I_{p,q}T^{-1}I_{p,q}^{-1} \\ &\Leftrightarrow {}^t\exp(U) = I_{p,q}\exp(U)^{-1}I_{p,q}^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exp({}^tU) = \exp(-I_{p,q}UI_{p,q}^{-1}) \\ &\Leftrightarrow {}^tU = -I_{p,q}UI_{p,q}^{-1} \quad \text{par bijectivité de l'exponentielle,} \\ &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{{}^tU}{2}\right) = \exp\left(-I_{p,q}\frac{U}{2}I_{p,q}^{-1}\right) \\ &\Leftrightarrow {}^t\exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p,q}\exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1}I_{p,q}^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q). \end{aligned}$$

Or $\exp\left(\frac{U}{2}\right) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp\left(\frac{U}{2}\right)^2 = \exp(U) = T = S^2$.

Par unicité de la racine carée, on a $S = \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q)$. De plus, $O = MS^{-1} \in O(p,q)$.

Mais comme la décomposition polaire est une bijection bicontinue, c'est-à-dire $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O(n) \times Sn^{++}(\mathbb{R})$, on a :

$$O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap Sn^{++}(\mathbb{R})).$$

$*$ Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(p,q) \cap O(n)$. Alors :
$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA - B^tB & A^tC - B^tD \\ C^tA - D^tB & C^tC - D^tD \end{pmatrix}$.
$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tB \\ {}^tC & {}^tD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^tA + B^tB & A^tC + B^tD \\ C^tA + D^tB & C^tC + D^tD \end{pmatrix}$.
On a donc $B^tB = 0$ donc $\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \mathrm{tr}(B^tB) = 0$ donc $B = 0$ (on peut aussi remarquer que l'on a un produit scalaire). De même $C = 0$.
Ainsi $A \in O(p)$ et $D \in O(q)$. On a donc :

$$O(p,q) \cap O(n) = \{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \mid A \in O(p),\ D \in O(q)\} \simeq O(p) \times O(q).$$

$*$ Etudions à présent $O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Posons $L := \{U \in M_n(\mathbb{R}) \mid UI_{p.q} + I_{p.q}U = 0\}$.
Alors $\exp : L \cap S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.
En effet :
➢ L'application est bien définie : si $U \in L \cap S_n(\mathbb{R})$ alors $U = {}^tU = -I_{p.q}UI_{p.q}^{-1}$ alors $\exp(U) \in O(p,q)$. De plus, $\exp(U) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
➢ L'application est bicontinue et injective : cela découle de l'homéomorphisme $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
➢ L'application est surjective : soit $T \in O(p,q) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors il existe $U \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp(U)$. Comme $U \in S_n(\mathbb{R})$ et $T \in O(p,q)$ alors ${}^tU = -I_{p.q}UI_{p.q}^{-1}$ donc $U \in L$. Donc $U \in L \cap S_n(\mathbb{R})$.

Comme $L \cap S_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}-$ev, cherchons sa dimension.
Soit $U := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$. On a donc :
$U \in S_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA = A,\ {}^tD = D,\ {}^tB = C$.
$U \in L \Leftrightarrow UI_{p.q} + I_{p.q}U = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow A = D = 0$.
On a donc :

$$L \cap S_n(\mathbb{R}) = \{ \begin{pmatrix} 0 & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix} \mid B \in M_{p.q}(\mathbb{R})\} \simeq M_{p.q}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}.$$

Conclusion : $O(p,q) \simeq O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$. □

Lemme 0.2

L'application $\exp : S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

Démonstration.
➢ Montrons que l'application est bien définie.
Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $S = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ où $P \in O(n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$.
Alors $\exp(S) = P\ \mathrm{diag}(e^{\lambda_1, ..., e^{\lambda_n}\ {}^tP} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
On remarque aussi que, par restriction, l'application exp est continue.

➢ Montrons que l'application est surjective.
Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
$B = P\ \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n P^{-1} = \exp(P\ \mathrm{diag}(\ln(\lambda_1), ..., \ln(\lambda_n))\ {}^tP)$ où $P \in O(n)$ et $\lambda_i > 0$.

➢ Montrons que l'application est injective.
Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tel que $\exp(A) = \exp(A')$.
On note $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$ les valeurs propres de $\exp(A)$.

Soit Q un polynôme interpolateur : $Q(e^{\lambda_1} = \lambda_1$.
Alors $A = Q(\exp A) = Q(\exp A') \in \mathbb{C}[A']$ donc A et A' commutent. Par diagonalisation simultanée, on a $A = PDP^{-1}$ et $A' = PD'P^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$, D et D' diagonales. Mais alors :
$\exp(A) = \exp(A') \Leftrightarrow \exp(D) = \exp(D') \Leftrightarrow D = D' \Leftrightarrow A = A'$.

➢ Montrons que l'application réciproque est continue.
Soit $(B_p)_p$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui converge vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Pour tout $p \geq 1$, on note A_p et A l'unique élément de $S_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $B_p = \exp(A_p)$ et $B = \exp(A)$. Montrons que $\lim\limits_{p \to +\infty} A_p = A$.
Tout d'abord, A est l'unique valeur d'adhérence de $(A_p)_p$. En effet, soit ϕ une sous-suite qui converge vers $A'' \in S_n(\mathbb{R})$. Mais on a, $\lim\limits_{p \to +\infty} e^{A_{\phi(p)}} = \lim\limits_{p \to +\infty} B_{\phi(p)} = B = e^A$. Par injectivité de l'exponentielle, $A = A''$.
Montrons à présent que $(A_p)_p$ est une suite bornée. En effet, $(B_p)_p$ converge donc est bornée par C pour la norme subordonée à la norme euclidienne, que l'on notera $|| \cdot ||_2$ et par continuité de l'inverse sur $GL_n(\mathbb{R})$, la suite $(B_p^{-1})_p$ converge vers B^{-1} et est également bornée pour $|| \cdot ||_2$ par C'. Or, $\forall M \in S_n(\mathbb{R})$, $||M||_2 = \rho(M)$. Donc l'union des spectres des matrices B_p pour tout $p \geq 1$ est à la fois majorée par C et minorée par C'. Donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Sp}(B_p) \subset [C'; C] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Sp}(A_p) \subset \underbrace{[\ln C'; \ln C]}_{\text{compact}}$. Donc la suite $(A_p)_p$ est bornée pour $|| \cdot ||$.

La suite $(A_p)_p$ est bornée et ne possède qu'une seule valeur d'adhérence donc $(A_p)_p$ converge vers A. $\square$