150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

$\mathbb{K}$ corps quelconque commutatif, $\overline{\mathbb{K}}$ une clotûre algébrique

I. Actions usuelles et invariants

1. Définitions générales

Def 1 : action d'un groupe G sur un ensemble X : morphisme $\rho : G \longrightarrow \mathfrak{S}(X)$

Def 2 : Orbite d'un élément $x \in X$ sous l'action de G : $O(x) = \{\rho(g)(x),\ g \in G\}$

Def 3 : Quotient de X par G : l'ensemble $X/_G := \{O(x),\ x \in X\}$

Def 4 : Un invariant de l'action de G sur X est une application $f : X \to Y$, où Y est un ensemble, telle que $f \circ \rho = f$. L'invariant est total si f est injective.

Def 5 : Dans le cas où X est un espace de matrices, une forme normale pour l'action de G est un ensemble de matrices représentant les orbites.

2. Action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par translation

Def 6 : action par translation
$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) &\longmapsto PM \quad \text{(à gauche)} \\ (P, M) &\longmapsto MP^{-1} \quad \text{(à droite)} \end{aligned}$$

Rq 7 : Ce sont des actions à gauche

Th 8 : ker : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \ker(A)$ est un invariant total pour la translation à gauche.

Im : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{Im}(A)$ est un invariant total pour la translation à droite.

Ex 9 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ont même noyau. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Pas même image.

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ pas même noyau $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, même image $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Appli 10 : L'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ via $P \cdot x := Px$ est transitive.

Def 11 : action par équivalence :
$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times GL_m(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ ((P, Q), M) &\longmapsto PMQ^{-1} \end{aligned}$$

orbites : " classes d'équivalence "

Th 12 : Le rang est un invariant total pour l'action par équivalence

Ex 13 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont équivalentes via $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Action par conjugaison

Def 14 : Action par conjugaison :
$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) &\longmapsto PMP^{-1} \end{aligned}$$

Prop 15 : Invariants : rang, trace, polynôme caractéristique χ_A, polynôme minimal π_A, valeurs propres.

Rq 16 : Ils ne sont pas totaux : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ même : trace, det, valeurs propres, χ_A, mais non conjuguées (pas même π) (+ cf annexes)

Def 17 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp trigonalisable) si sa classe de similitude contient une matrice diagonale (resp triangulaire). Ensemble noté $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (resp $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$).

Def 18 : spectre : orbite des valeurs propres comptées avec multiplicité $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.

Th 19 : $sp : \mathcal{D}_n(\overline{\mathbb{K}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}^n/\mathfrak{S}_n$ est un invariant total pour la restriction de la conjugaison aux matrices diagonalisables.

Appli 20 : Dénombrement : $|\mathcal{D}_n(\mathbb{F}_q)| = \displaystyle\sum_{n_1 + \dots + n_q = n} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$ DEV 1

Avec $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$.

Prop 21 : $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont conjuguées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssi elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Appli 22 : Le couple (χ, π) est un invariant total si $n = 2$.

Th 23 : $\chi : \mathcal{D}_n(\overline{\mathbb{K}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{K}}[X]$ est un invariant total.

4. Action par congruence

pour $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Def 24 : action de $GL_n(\mathbb{K})$ par congruence sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$:
$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, S) &\longmapsto PS\,{}^tP \end{aligned}$$

Rq 25 : La congruence est le changement de base pour les formes quadratiques.

Def 26 : discriminant : $\delta : \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$, $M \longmapsto \det M$ (classe de $\det M$ dans le quotient par les carrés)

Prop 27 : C'est un invariant non total pour l'action par congruence

C-ex 28 : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ m̂ δ mais pas congruentes : pas m̂ rang

Def 29 : Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\underline{P}(A) = \max\{\dim F \text{ tq } F \text{ sev de } \mathbb{R}^n \text{ et } \forall x \in F,\ {}^t x A x > 0\}$

$\underline{P}$ est un invariant non total : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ même $\underline{P}$, mais pas m̂ discriminant

II. Représentants : restriction et décomposition

1. Formes normales et classification

*** Equivalence**

Def 31 : Matrices de <u>transvection</u> : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$ $\lambda \in \mathbb{K}$
dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ <u>dilatation</u> : $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$ (cf annexe 2)
<u>permutation</u> : $(\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j\in[\![1,n]\!]^2}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Th 32 : (Pivot de Gauss) Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice échelonnée réduite via une composition de matrices de transvection, dilatation, permutation. Cette matrice est de plus unique.

Ex 33 : (cf annexe 3)

Coro 34 : L'ensemble $\left\{ J_r := \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}, r \in [\![0,n]\!] \right\}$ est une forme normale pour l'équivalence.

App 35 : (Formule du rang) pour $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $n = rg A + \dim \ker A$.

Cor 36 : $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et dilatations.

Cor 37 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ tq $PAQ^{-1} = J_r$. Alors les r premières colonnes de P^{-1} forment une base de $\operatorname{Im} A$; les $n-r$ dernières de Q^{-1} une base de $\ker A$. (cf annexe 4)

*** Conjugaison**

Def 38 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Th 39 : (Réduction de Jordan) Dans $\overline{\mathbb{K}}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{K}})$, il existe une unique matrice diagonale par blocs de Jordan (à permutation près des blocs) qui lui est conjuguée.

App 40 : Calcul d'exponentielle de matrices
Résolution de systèmes linéaires.

Ex 41 : $\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & \\ & \begin{smallmatrix}\lambda & 0 \\ 0 & \lambda\end{smallmatrix} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & \\ & J_2(\lambda) \end{pmatrix}$ ne sont pas conjuguées, mais même det, trace, χ et π.

Def 42 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$.
On note $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice compagnon associée à P.

Th 43 : (Réduction de Frobenius) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique famille de polynômes $P_1, \dots, P_r$ telle que
- $P_r | \dots | P_1$, $P_1 = \pi_A$, $P_1 \dots P_r = \chi_A$
- A conjuguée à $\begin{pmatrix} C_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{P_r} \end{pmatrix}$ Ce sont les <u>facteurs invariants de A</u>

Cor 44 : Les matrices de la forme précédente font une forme normale de la conjugaison.

App 45 : . A et ${}^tA$ sont conjuguées . Commutant de A minimal ssi A cyclique (ie $\chi_A = \pi_A$).

Ex 46 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & (0) \\ 1 & 0 & \\ (0) & & (0) \end{pmatrix}$ conjuguée à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

*** Congruence**

Th 47 : (Réduction de Gauss) Toute forme quadratique q s'écrit de manière unique (à facteur carré près) comme somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

Cor 48 : * $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: le rang est un invariant total pour la congruence
* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: (rg, p) est un invariant total pour la congruence

Ex 49 : $q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_2x_3$ est congruente à $\tilde{q}(x) = \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - \tilde{x}_3^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Restriction et décomposition

*** Equivalence**

Th 50 : (Gram-Schmidt) Les matrices triangulaires supérieures à diagonale strictement positive sont une forme normale de l'action par translation de $O_n(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Cor 51 : Pour $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists ! (Q,R)$ tq $Q \in O_n(\mathbb{R})$, R triangulaire supérieure à diagonale positive telle que $A = QR$.

Appli 52 : * Résolution de systèmes rectangulaires par la méthode de Householder
* (Hadamard) $|\det A| \leq \|A_1\|_2 \dots \|A_n\|_2$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

*** Conjugaison**

Th 53 : (Spectral) Les matrices diagonales de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ sont une forme normale de la conjugaison (ou congruence) de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Th 54 : (Décomposition polaire) $\mu : \begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$ est un difféomorphisme — DEV 2

Cor 55 : $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une forme normale pour l'action de $O_n(\mathbb{R})$ par translation sur $GL_n(\mathbb{R})$.

App 56 : Si G un ssgpe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$, alors $G = O_n(\mathbb{R})$.

App 57 : $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$ ρ : rayon spectral

- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont unitairement conjuguées ssi elles sont orthogonalement conjuguées.

App 58 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nulle ssi $A + {}^tA$ nilpotente.

III - Topologie des actions

1 - Régularité des invariants

Prop 59 : (Equivalence) Le rang est une application semi-continue inférieurement pour la topologie discrète sur $\mathbb{N}$.

App 60 : Pour $p \in [\![0, n-1]\!]$, $\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } rg(M) \leq p \}$ est fermé.

* Conjugaison

Prop 61 : Le determinant est polynomial donc $\mathcal{C}^\infty$.

App 62 :
* $GL_n(\mathbb{K})$ dense et ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
* $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe
* $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Prop 63 : χ est continu en A
π n'est pas continu en A.

App 64 : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$

C-ex 65 : $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1/n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\pi_{A_n} = X^2$ et $\pi_{A_n} \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0$

Th 66 : $sp : \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) / GL_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^n / \mathfrak{S}_n$ est un homéomorphisme

2 - Topologie des classes

Prop 67 : L'unique orbite fermée pour la translation dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'orbite nulle.

* Conjugaison

Prop 68 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors A diagonalisable ssi son orbite est fermée.

Prop 69 : $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Faux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

C-ex 70 : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ car $\chi = X^2 + 1$ et χ continu.

Prop 71 : Une classe de conjugaison n'est jamais ouverte (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Prop 72 : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $0 \in \overline{\mathcal{O}(A)}$.

App 73 : Toute orbite de conjugaison est adhérente à une matrice diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Prop 74 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(e^A) = e^{tr(A)}$

App 75 : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $e^A \in GL_n(\mathbb{C})$.

3 - Décompositions

Th 76 : (Iwasawa) On note $\mathcal{A} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_i > 0 \right\}$
$\mathcal{N} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, * \text{ réels} \right\}$

Alors
$$\begin{aligned} \varphi : O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A} \times \mathcal{N} &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ (K, A, N) &\longmapsto KAN \end{aligned}$$
est un homéomorphisme.

App 77 : Décomposition de Cholesky : Pour $A \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, il existe T triangulaire supérieure tq $A = {}^tT.T$.

Rq 78 :
$$\begin{aligned} \pi : GL_n(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto \text{"}\sqrt{A}\text{"} \end{aligned}$$
est un homéomorphisme.

Annexe 1

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & (0) \\ (0) & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (0) & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$ ont même χ et même π (X^2)

mais non semblables (pas même rang)

Annexe 2

$$T_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \overset{j}{\vdots} & \\ \cdots & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad D_{ij}(\lambda) = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & \overset{i}{\vdots} & & \\ & \ddots & & & \\ & 1 & & & \\ \cdots & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Annexe 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Annexe 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

via $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ $\ker A = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ref : * Mneimné - Testard : Introduct° Gpe de Lie
* NH_2G_2
* Mansuy - Mneimné

Autres choix :
- Plus de choses sur les formes quadratiques
- Génération de $Gl_n(\mathbb{Z})$ avec pgcd (cf Cognet)