Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices

Cadre : $\mathbb{K}$ est un corps, $n, p \in \mathbb{N}^*$, $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne, q est une puissance d'un nombre premier, $\mathbb{F}_q$ est le corps à q éléments.

Def 1 : Si G est un (produit de) sous-groupe(s) de matrices inversibles et X est un espace de matrices (vectoriel ou topologique), une action de G sur X, $G \curvearrowright X$, est donnée par
$$G \times X \longrightarrow X, \quad (P, M) \longmapsto g\cdot M$$

Rq 2 : L'idée est de faire agir des inverses d'une algèbre de matrices sur cette algèbre de matrices.

Def 3 : Un invariant pour cette action est une application $i : X \to E$, où E est un ensemble quelconque, telle que : $\forall P \in G, \forall M \in X, i(P\cdot M) = i(M)$

I - Action par translation

1 - Résultats élémentaires

Def 4 : On dit que l'on a une action par translation si $X = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $G = GL_n(\mathbb{K})$ où $GL_p(\mathbb{K})$ via : $P\cdot M = PM$ (translation à gauche)
$P\cdot M = MP$ (translation à droite)

Rq 5 : On peut remplacer $GL_n(\mathbb{K})$ par un de ses sous-groupes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un sous-espace stable par cette action.

Def 6 : (Matrice de permutation) Soit $\sigma \in S_n$. On définit la matrice de permutation de σ par : $P_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \le i,j \le n}$ et $S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{K})$

Ex 7 : Si $\sigma = (23) \in S_3$, alors $P_\sigma = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

Prop 8 : On a donc une action $S_n \curvearrowright GL_n(\mathbb{K})$ via : $\sigma\cdot M = P_\sigma M$ où $\sigma\cdot M = MP_\sigma$. L'orbite de cette action à gauche est l'ensemble des matrices avec les lignes de M, l'orbite de cette action à droite est l'ensemble des matrices avec les colonnes de M. Chaque orbite est de cardinal au plus $n!$

Ex 9 : Si $M = \begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}$, alors $O_M = \left\{\begin{bmatrix}1&3\\2&4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\right\}$ pour l'action à gauche.

Rq 10 : L'action par translation à gauche n'est pas forcément ni transitive, ni fidèle.

C-Ex 11 : Si $S_2 \curvearrowright \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par translation à gauche, alors :
$O_{I_2} = \left\{I_2, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right\}$, $O_{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}} = \left\{\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$. On a deux orbites.

De plus, on a : $(12)\cdot\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ et $(12) \neq Id$

Prop 12 : Le rang et la dimension du noyau sont invariants pour l'action par translation à gauche ou à droite

2 - Décompositions matricielles

Def 13 : (Matrices triangulaires)
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) $= \{$Matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures (resp. inférieures)$\}$
$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{R}) : \forall i \in [\![1, n]\!], m_{i,i} > 0\}$ (coeff. diagonaux >0)

Th 14 : (Décomposition QR) L'application suivante est un homéomorphisme :
$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}), \quad (Q, R) \longmapsto QR$$
i.e. Toute matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ représente une orbite pour l'action $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright GL_n(\mathbb{R})$ par translation à gauche

Rq 15 : Cette décomposition est une reformulation de l'algorithme de Gram-Schmidt.

Appli 16 : Résolution de systèmes linéaires en analyse numérique
$AX = B \iff QRX = B \iff RX = Q^T B$ (Système triangulaire)

Th 17 : (Décomposition polaire) DVPT 1
L'application suivante est un homéomorphisme
$$S_n^{++}(\mathbb{R}) \times O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad (S, Q) \longmapsto SQ$$
Ainsi, les orbites de l'action $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright GL_n(\mathbb{R})$ par translation à droite sont caractérisées par $S_n^{++}(\mathbb{R})$

Appli 18 : (Norme subordonnée)
Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$: $|||A|||_2 = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ donc $|||A|||_2 = \rho(AA^T)^{\frac{1}{2}}$

Rq 19 : C'est une reformulation de l'écriture d'un complexe sous forme polaire : $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*$, $(r, \theta) \longmapsto re^{i\theta}$

II - Action par équivalence

1 - Action, invariants et orbites

Def 20 : On dit que l'on a une action par équivalence si $X = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $G = GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ et que :
$$GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad (P, M, Q) \longmapsto (P,Q)\cdot M = PMQ^{-1}$$
$M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes si $\exists (P,Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$: $M = PNQ^{-1}$

Rq 21 : Il s'agit bien d'une action de groupe, le groupe en question étant le produit direct $GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$

Rq 22 : Une action par équivalence est une combinaison d'une action par translation à gauche et d'une action par translation à droite

Ex 23 : Toujours en considérant l'injection $S_n \hookrightarrow GL_n(\mathbb{K})$, $\sigma \mapsto P_\sigma$, on a l'action

$$\begin{array}{ccc} (S_n \times S_n) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ ((\sigma, \tau), M) & \longmapsto & P_\sigma M P_\tau^{-1} \end{array}$$

L'ensemble des matrices bistochastiques est stable par cette action

Prop 24 : Le rang et la dimension du noyau sont invariants par l'action par conjugaison.

Th 25 : Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à une matrice $J_{n,p,r} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r = rg(M) \leq \min\{n, p\}$.

$J_{n,p,r}$ est appelée forme normale de M.
Il y a donc $\min\{n,p\}$ orbites par l'action par conjugaison, dont les représentants sont les matrices $J_{n,p,r}$. Le rang caractérise donc l'orbite. On dit que c'est un invariant total (ou complet)

2 - Application à la résolution de systèmes linéaires

Def 26 : On définit les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda)$, de dilatation $D_i(\lambda)$ et de transposition $T_{i,j}$ en annexe (cf Fig 1)

Prop 27 : Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{K})$, les transvections et les dilatations engendrent $GL_n(\mathbb{K})$

Lemme 28 : (i) Multiplier à gauche par une matrice d'opération élémentaire opère sur les lignes

(ii) Multiplier à droite par une matrice d'opération élémentaire opère sur les colonnes.

Ex 29 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \overset{L_1 = L_1 + L_2}{=} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{C_2 = C_1 + C_2}{=} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

Th 30 : (Méthode du pivot de Gauss)
Par opération sur les lignes et les colonnes, on peut échelonner $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en $J_{n,p,r}$. C'est la forme échelonnée réduite d'une matrice

Prop 31 : En échelonnant M en colonnes, on peut calculer son rang

Ex 32 : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \overset{C_3 = C_3 - 4C_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{C_3 = C_3 + 3C_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Donc $rg(M) = 2$

Rq 33 : Une matrice M est échelonnée (en lignes) si, et seulement si

$$M = \begin{bmatrix} * & * \cdots * & * \\ & (0) & * \cdots & * \end{bmatrix}$$

Th 34 : (Décomposition d'Iwasawa)
Si $UT_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in T_n^+(\mathbb{R}) : \forall i \in [\![1,n]\!],\ M_{i,i} = 1\}$
et $Diag_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \text{diagonale} : \forall i \in [\![1,n]\!],\ M_{i,i} > 0\}$, alors
on a cet homéomorphisme

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times Diag_n^+(\mathbb{R}) \times UT_n^+(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\sim} & GL_n(\mathbb{R}) \\ (Q, D, T) & \longmapsto & QDT \end{array}$$

Ainsi, les matrices de $Diag_n^+(\mathbb{R})$ caractérisent les orbites par l'action par équivalence $O_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R}) \times UT_n^+(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

III - Action par conjugaison

1 - Conjugaison, invariants et classes de similitude

Def 35 : On dit que l'on a une action par conjugaison si $X = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $G = GL_n(\mathbb{K})$ et que :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$$

Deux matrices M et N sont dites semblables si, et seulement si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : M = PNP^{-1}$. Les orbites sont appelées classes de similitude.

Ex 36 : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont semblables, mais pas $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ et I_2

Prop 37 : La trace, le rang, la dimension du noyau, le déterminant, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont des invariants de similitude.

Rq 38 : Ces invariants ne déterminent pas si deux matrices sont semblables.

C-Ex 39 : I_2 et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ont même trace, rang, déterminant, polynôme caractéristique et ne sont pourtant pas semblables

Th 40 : (Réduction de Frobenius)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$, $PMP^{-1} = \begin{bmatrix} C_{P_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C_{P_r} \end{bmatrix} := R$
où C_P est la matrice compagnon de $P \in \mathbb{K}[X]$ (cf Fig 2)
avec $P_1 | \cdots | P_r$, $P_1 = \mu_M$ (Polynôme minimal) et $P_1 \cdots P_r = \chi_M$ (polynôme caractéristique)
Les $P_1, \ldots, P_r$ sont appelés les facteurs invariants de M. R est la forme normale, appelée réduite de Frobenius.

Cor 41 : Deux matrices sont semblables si elles ont les mêmes facteurs invariants, qui sont des invariants complets pour l'action.

Ex 42 : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\chi_M = (x-1)^2(x+1)$, les facteurs invariants possibles sont $\{x-1, (x-1)(x+1)\}$ ou $\{\chi_M\}$. Seul le second cas convient, et M est semblable à $C_{\chi_M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\chi_M = x^3 - x^2 - x + 1$

2 - Réduction de matrices

Def 43 : On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$: PMP^{-1} est diagonale. On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Def 44 : On dit que M est trigonalisable ssi $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$: PMP^{-1} est triangulaire

Prop 45 : $D_n(\mathbb{F}_q) = \bigsqcup_{\substack{(m_1,\dots,m_q)\in\mathbb{N}^q \\ m_1+\dots+m_q=n}} \mathcal{O}_{D_m}$, $D_m = \begin{bmatrix} \alpha_1 I_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_q I_{m_q}\end{bmatrix}$
$\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$

Appli 46 : (Comptage de matrices diagonalisables sur un corps fini)

$$|D_n(\mathbb{F}_q)| = \sum_{\substack{(m_1,\dots,m_q)\in\mathbb{N}^q \\ m_1+\dots+m_q=n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^q |GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)|}$$ DVPT 2

Prop 47 : Les représentants des orbites de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ sont les matrices diagonales $\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ où chaque $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est différent, avec $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

Coro 48 : Le spectre est un invariant total de similitude sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$, si on ordonne les valeurs propres par ordre croissant.

Th 49 : (Décomposition de Jordan)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$. $PMP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{m_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_{m_d}\end{bmatrix}$, $m_1+\dots+m_d = n$
où $A_{m_i} = \begin{bmatrix} J_{s_1}(\lambda_i) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_{s_{m_i}}(\lambda_i)\end{bmatrix}$ où $s_1+\dots+s_{m_i} = m_i$. $A_{m_i} \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C})$
$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & (0) \\ & \ddots & 1 \\ (0) & & \lambda\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$

C'est la forme normale de Jordan (ou réduite de Jordan)

Prop 50 : Les $A_{m_1},\dots,A_{m_d}$ caractérisent, à permutation près, les orbites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable)

Appli 51 : Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M et M^T sont semblables. $M^T \in \mathcal{O}_M$

Rq 52 : L'action par conjugaison correspond à un changement de base pour un endomorphisme (d'espace vectoriel)

IV - Action par congruence

1 - Lien avec les formes quadratiques

Def 53 : On dit que l'on a une action par congruence ssi $X = S_n(\mathbb{K})$ et $G = GL_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans toute la suite) et que $GL_n(\mathbb{K}) \times S_n(\mathbb{K}) \to S_n(\mathbb{K})$, $(P, M) \mapsto P\cdot M = PMP^T$
$M, N \in S_n(\mathbb{K})$ sont dites congruentes ssi $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$: $M = PNP^T$.

Ex 54 : $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix}$ sont congruentes : $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

Def 55 : $\mathcal{U}\mathcal{T}_n^{-+}(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{R}) : \forall i \in [\![1,n]\!], M_{ii} > 0\}$

Th 56 : (Factorisation de Cholesky)
$\forall M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $\exists ! L \in \mathcal{U}\mathcal{T}_n^{-+}(\mathbb{R})$: $M = LL^T$
Autrement dit, pour l'action $\mathcal{U}\mathcal{T}_n^{-+}(\mathbb{R})$ ↷ $S_n(\mathbb{R})$, par congruence, l'orbite de I_n est $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (qui caractérise l'orbite)

Rq 57 : Lorsque $O_n(\mathbb{R})$ ↷ $S_n(\mathbb{R})$ par congruence, cette action est aussi celle par conjugaison.

Th 58 : (Théorème spectral) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\exists D$ diagonale : $D = PMP^T$, i.e. toute matrice symétrique est dans l'orbite d'une matrice diagonale par l'action par congruence.

Th 59 : (Théorème d'inertie de Sylvester) Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$: $PMP^T = I_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} I_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -I_\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, (α,β) ne dépend pas de P et c'est la signature de M
On note $(\alpha,\beta) = \mathrm{sign}(M)$. La signature caractérise donc les orbites. C'est un invariant total, $I_{\alpha,\beta}$ est la forme normale

Rq 60 : L'action par congruence correspond à un changement de base pour une forme quadratique, elle n'est ni transitive, ni fidèle.

Prop 61 : Le rang est invariant pour l'action $GL_n(\mathbb{K})$ ↷ $S_n(\mathbb{K})$ par congruence.

Th 62 : Le rang caractérise les orbites pour l'action $GL_n(\mathbb{C})$ ↷ $S_n(\mathbb{C})$ par congruence, c'est un invariant complet

2 - Le groupe orthogonal

Def 63 : On définit le groupe orthogonal, noté $O_n(\mathbb{R})$, comme étant le stabilisateur de I_n par l'action $GL_n(\mathbb{R})$ ↷ $S_n(\mathbb{R})$ par congruence.
$O_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Stab}(I_n) = \{P \in GL_n(\mathbb{R}) : PP^T = I_n\}$

Rq 64 : Si on considère l'action par translation $GL_n(\mathbb{R})$ ↷ $\mathbb{R}^n$ via $P\cdot X = PX$, alors $O_n(\mathbb{R})$ stabilise la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ (isométrie)

Th 65 : (Réduction des endomorphismes orthogonaux)
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$ $PMP^T = \mathrm{diag}(I_\alpha, -I_\beta, R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r})$
où $\alpha,\beta \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,r]\!]$, $\theta_i \in]0,2\pi[\setminus \{\pi\}$, $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$
Ainsi, les orbites de $O_n(\mathbb{R})$ ↷ $O_n(\mathbb{R})$ par congruence sont caractérisées par $(\alpha, \beta, \theta_1, \dots, \theta_r)$. (éventuellement, aucune matrice de rotation n'apparaît). Ce sont des invariants complets.

Appli 66 : $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes :

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = 1\}$$
$$\text{et } O_n^-(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) : \det(P) = -1\}$$

Rq 67 : La trace et le déterminant sont invariants pour cette action, mais ne sont pas complets.

Annexe :

Nom	Opération élémentaire	Matrice
Transvection	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & (0) & \lambda \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$
Dilatation	$L_i \leftarrow \lambda L_i$ $C_i \leftarrow \lambda C_i$	$D_i(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & & & & (0) \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$
Transposition	$L_i \leftrightarrow L_j$ $C_i \leftrightarrow C_j$	$T_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array}$

Matrices d'opérations élémentaires pour la résolution de systèmes linéaires

(Fig 1)

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$C_P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix}$$

Illustration d'une matrice compagnon

(Fig 2)

Références :

- Mansuy & Mneimné, Algèbre linéaire, Réduction des endomorphismes
- P. Caldero, J. Germoni, Histoires Hédonistes de Groupes et Géométries [1]
- D. Perrin Cours d'algèbre