Leçon 150. Exemples d'action de groupe sur les espaces de matrices.

On se donne E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $m \geq 1$ un entier.

1 Action par translation

1.1 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et pivot de Gauss

Définition 1. *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit par translation à gauche sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ via $A \cdot M = AM$.*

Proposition 2. *On suppose $m \leq n$, et on se donne A et A' dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ des matrices de rang m. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i. Les colones de A et A' engendrent le même sous-espace.

ii. Il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ telle que $A' = AQ$.

Définition 3. *Pour $i \neq j$, $n \geq 2$ et $\lambda, \alpha \neq 0$, on définit les matrices élémentaires :*

Dilatation	Transvection	Permutation
$D_i(\lambda) = I_n + (\alpha - 1)\, E_{ii}$	$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},\ \ i \neq j$	$P_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$
$C_i \leftarrow C_i + \alpha C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

Définition 4. *On appelle pivot d'une ligne non nulle le coefficient non nul situé dans la colonne la plus à gauche. Une matrice est dite échelonnée en lignes lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :*

- *Si une ligne est nulle, toute les lignes suivantes sont nulles.*
- *Le pivot d'une ligne est strictement plus à droite que les pivots des lignes précédentes.*

Une matrice échelonnée est dite réduite si, de plus, tous les pivots sont égaux à 1 et les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Théorème 5. *Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

- *Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même orbite si et seulement si elles ont le même noyau.*
- *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée en ligne réduite : on a la réunion disjoints suivante :*
$$\bigcup_{E \in \mathcal{E}_n} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cdot E$$
Où $\mathcal{E}_n$ désigne l'ensemble des matrices échelonnées réduites de taille $n \times n$.

Remarque 6. Le théorème précédent se démontre via l'algorithme du pivot de Gauss. Partant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on la multiplie à gauche par des matrices élémentaires pour obtenir une matrice d'abord échelonnée en lignes, puis échelonnée en lignes réduite en annulant les coefficients éventuels au-dessus des pivots. On trouve alors P inversible telle que PA soit échelonnée réduite.

Proposition 7. *La méthode du pivot de Gauss a une complexité algorithmique en $O(n^3)$.*

Exemple 8. $\begin{cases} 2x + y - 4z = 1 \\ 2x + 2y - z = 4 \\ 2x + 3y + 3z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 4z = 1 \\ -y + 3z = 3 \\ 2y + 7z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 4z = 1 \\ -y + 3z = 3 \\ 13z = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1 - y + 4z) \\ y = 3 - 3z \\ z = 10/13 \end{cases}.$

Remarque 9. Par transposition, on obtient que A et A' sont dans la même orbite pour l'action à droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elles ont la même image.

Théorème 10. *Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$.*

Corollaire 11. *Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$.*

1.2 Actions par translation de $O_n(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$ et décomposition polaire

Définition 12. *Les sous-groupes orthogonaux $O_n(\mathbb{R})$ et unitaires $U_n(\mathbb{C})$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ agissent par translation à gauche sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

Développement 1 :

Théorème 13. *(décomposition polaire)*
La multiplication matricielle induit des homéomorphismes :
$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \quad et \quad U_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$
via $(O, S) \mapsto OS$ et $(U, H) \mapsto UH$.

Corollaire 14. *Pour toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a*
$$|||A|||_2 \; = \; \sqrt{\rho(A^T A)},$$
où ρ est le rayon spectral de A, donné par $\rho(A) := \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i| \, : \, \lambda_i \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Corollaire 15. *Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient $O_n(\mathbb{R})$ est $O_n(\mathbb{R})$ lui-même.*

1.3 Action sur les drapeaux et décomposition de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

Définition 16. *On appelle drapeau de k^n toute suite $(0 = F_0 \subset \cdots \subset F_n)$ de sous-espaces vectoriels de k^n telles que les inclusions soient strictes. Si de plus $\dim(F_i) = i$, on dit que le drapeau est complet. On note* Drap *l'ensemble des drapeaux complets de k^n.*

Notation 17. *On appelle drapeau complet canonique le drapeau $C := \{0\} \subset \mathrm{Vect}(e_1) \subset \cdots \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de k^n.*

Définition 18. *On note $B_n(k)$ l'ensemble des matrices triangulaires inversibles de $\mathrm{GL}_n(k)$.*

Proposition 19. *$B_n(k)$ est le stabilisateur de C pour l'action par translation à gauche de $\mathrm{GL}_n(k)$ sur* Drap. *En particulier, c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(k)$.*

Théorème 20. ***(Bruhat)***
En notant, pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $B_n(\mathbb{K})\, w_\sigma\, B_n(\mathbb{K}) := \{t w_\sigma s \,:\, t, s \in B_n(\mathbb{K})\}$, on a la décomposition :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{S}_n} B_n(\mathbb{K})\, w_\sigma\, B_n(\mathbb{K})$$

Corollaire 21. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *agit sur* $\mathrm{Drap} \times \mathrm{Drap}$ *et l'action possède $n!$ orbites.*

2 Action par équivalence et par conjugaison

2.1 Action de Steinitz

Définition 22. *(Action de Steinitz)*
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ *agit sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par équivalence, via :*

$$\cdot \left\{ \begin{array}{lcl} (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), M) & \mapsto & PMQ^{-1} \end{array} \right.$$

Proposition 23. *(Théorème du rang)*
Chaque orbite pour cette action contient un représentant de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où k est le rang de la matrice A. On dit que k est le rang de l'orbite en question.

Proposition 24. *On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$.*

2.2 Action par conjugaison

Définition 25. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par conjugaison (ou par similitude), via :*

$$\cdot \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \mapsto & P^{-1}MP \end{array} \right.$$

Cette action correspond au changement de base pour les applications linéaires.

Définition 26. *Deux matrices dans la même orbite pour cette action sont dites semblables.*

Exemple 27. Une matrice carrée de trace nulle est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale principale.

Remarque 28. Le principe de la réduction des endomorphismes est de trouver des représentants simples pour chaque orbite de cette action.

Définition 29. *On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$ si elle est semblable à une matrice diagonale. On dit qu'elle est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.*

Proposition 30. *Toute matrice à coefficients complexes est trigonalisable.*

Théorème 31. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est diagonalisable.*
2. *Le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(A - X I_n)$ de A est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour toute racine λ_i de χ_A de multiplicité h_i, on a $h_i = \dim(E_{\lambda_i})$.*
3. *E est somme directe des sous-espaces propres associés à A.*

Proposition 32. *Une matrice réelle semblable à une matrice diagonalisable réelle pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'est aussi pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Elle est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.*

Application 33. Les morphismes de groupe continus de $(\mathcal{S}^1, \times)$ vers $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ sont de la forme $\varphi(e^{it}) = Q\,\mathrm{diag}(R_{tk_1}, \ldots, R_{tk_r}, 1, \ldots, 1)Q^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$ et $k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$, où R_θ désigne la matrice de rotation d'angle θ.

Proposition 34. *Soit $q = p^n$ avec p premier. On note $\mathcal{D}_n(q)$ l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$. Alors $A \in \mathcal{D}_n(q) \Longleftrightarrow A^q = A$.*

Proposition 35. *Les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathcal{D}_n(q)$ sont de la forme $O(D_m)$ avec $D_m = \mathrm{Diag}(\alpha_1 I_{m_1}, \ldots, \alpha_q I_{m_q})$ où $(m_1, \ldots, m_q) \in \mathbb{N}^q$ vérifie $m_1 + \cdots + m_q = n$ et $\mathbb{F}_q = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$.*

Corollaire 36. *Le nombre de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}_q)$ est :*

$$\sum_{n_1 + \cdots + n_q = n} \frac{|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |\mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

2.3 Invariants de similitude

On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$.

Notation 37. *On note π_f le polynôme minimal de f, et $\mathcal{L}_f$ l'ensemble $\{P(f) \,:\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.*
Si $x \in E$, on note P_x le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \,:\, P(f)(x) = 0\}$, et E_x l'ensemble $\{P(f)(x) \,:\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.
Dans la suite, on notera k le degré de π_f et ℓ_x le degré de P_x pour $x \in E$.

Proposition 38. *L'ensemble $\mathcal{L}_f$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension k, dont une base est $(\mathrm{Id}_E, f, \ldots, f^{k-1})$. L'ensemble E_x est un sous-espace vectoriel de E de dimension ℓ_x, dont une base est $(x, \ldots, f^{\ell_x - 1}(x))$.*

Théorème 39. *Il existe $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$.*

Définition 40. *On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire que $k = \deg(\pi_f) = n$, ou encore que $\pi_f = (-1)^n \chi_f$, où χ_f désigne le polynôme caractéristique de f.*

Définition 41. *Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice $\mathcal{C}(P)$ (voire fig. 1)*

Proposition 42. *Le polynôme caractéristique $\chi_{\mathcal{C}(P)}$ de $\mathcal{C}(P)$ vérifie $\chi_{\mathcal{C}(P)} = (-1)^p P$.*

Théorème 43.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit égale à $\mathcal{C}(\pi_f)$.

Développement 2 :

Théorème 44. *(Invariants de similitude)*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une suite finie $F_1, \ldots, F_r$ de sous-espaces vectoriels de E, tous stables par f, telle que

1. *$E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$,*
2. *pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique,*
3. *si $P_i = \pi_{f_i}$, on a $P_{i+1} | P_i$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$.*

La suite $P_1, \ldots, P_r$ ne dépend que de f et non du choix de la décomposition. On l'appelle suite des invariants de similitude de f.

Application 45. (réduction de Frobenius)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \ldots, P_r$ la suite des invariants de similitude de f. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f s'écrit $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Diag}(\mathcal{C}(P_1), \ldots, \mathcal{C}(P_r))$.

On a $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \cdots P_r$ est le polynôme caractéristique de f, à un facteur $(-1)^n$ près.

Application 46.
Deux endomorphismes f et g de $\mathcal{L}(E)$ sont semblables si et seulement si ils ont les mêmes invariants de similitude.

3 Actions sur les matrices normales et symétriques

3.1 Actions par similitude de $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$

Définition 47. *Les sous-groupes $O_n(\mathbb{R})$ et $U_n(\mathbb{C})$ agissent par similitude sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par restriction de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.*

Théorème 48. *(Spectral)*
Chaque orbite de l'action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice diagonale.
Chaque orbite de l'action de $U_n(\mathbb{C})$ sur $H_n(\mathbb{C})$ contient une matrice diagonale réelle.
Ces orbites sont caractérisées par les valeurs propres (comptées avec multiplicité) des matrices qui les composent.

Définition 49. *On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est normal s'il commute avec son adjoint. Matriciellement, cela se traduit par $A A^T = A^T A$.*

Théorème 50. *(Réduction des isométries)*
Soit f un endomorphisme orthogonal. Il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de f est de la forme $\mathrm{Diag}(R(\theta_1), \ldots, R(\theta_r), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$, où $R(\theta_i)$ est la matrice de rotation d'angle $\theta_i \not\equiv 0[\pi]$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Proposition 51. *Les matrices de $O_3(\mathbb{R})$ sont semblables à $M(\varepsilon)$ (voir fig 2), où $\varepsilon = 1$ pour les matrices de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et $\varepsilon = -1$ pour les matrices de $O_3^-(\mathbb{R})$.*

Corollaire 52. *Pour $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, on a alors $\det(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 2\cos(\theta) + 1$.*

Théorème 53. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*

Théorème 54. $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe simple de $O_3(\mathbb{R})$.*

3.2 Action par congruence de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$

Définition 55. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *agit sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par congruence, via :*

$$.\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, M) & \mapsto & {}^t P M P \end{array}\right.$$

Théorème 56. *(Sylvester) Chaque orbite pour l'action précédente contient un représentant de la forme $\mathrm{Diag}(I_p, I_q, 0_{n-r})$, où $r = p + q$ est le rang des matrices de cette orbite. Le couple (p, q) est appelé la signature.*

Remarque 57. Le résultat précédent donne une classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$ via la matrice de leur forme polaire.

Lemme 58. *(Réduction différentiable des formes quadratiques)*
Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe un voisinnage V de A_0 et une application Ψ: $V \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$\forall A \in V \quad A = \Psi(A)^T A_0 \Psi(A).$$

Théorème 59. *(Lemme de Morse)*
Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose que zéro est un point critique quadratique non dégénéré de f, c'est-à-dire que $Df(0) = 0$ et que la forme quadratique hessienne $Df^2(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe deux voisinnages V et W de l'origine et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi: V \rightarrow W$ tel que $\varphi(0) = 0$, et en notant $u = (u_1, \ldots, u_n) =: \varphi(x)$ pour $x \in U$, on a :

$$f(x) - f(0) \;=\; u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2.$$

Théorème 60. *Pour une forme quadratique q sur $\mathbb{F}_q^n$, la matrice de la forme polaire de q est congruente à $\mathrm{Diag}(0, I_r)$ avec $r \leq n$ ou à $\mathrm{Diag}(0, I_r, \varepsilon)$ avec $r \leq n-1$ et où $\varepsilon \in \mathbb{F}_q$ n'est pas un carré.*

Application 61. (Loi de réciprocité quadratique) Soit p et q deux nombres premiers impairs distincts. Alors on a $\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

4 Annexe

Fig 1. Matrice compagnon

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Fig 2. Matices de $O_3(\mathbb{R})$

$$M(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$