120 – Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie).
Rang. Exemples et applications.

Cadre: $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

I – Théorie de la dimension

1. Familles libres, génératrices, bases

[GRI] p10-11 **Déf:** Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs de E. On dit qu'elle est :
- génératrice si $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$
(ie: $\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \,/\, x = \sum_i \lambda_i e_i$)
- libre si $\sum \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i, \lambda_i = 0$ $(\lambda_i \in \mathbb{K})$
- liée si elle n'est pas libre
- une base de E si elle est génératrice et libre.

[GRI] p14 **Prop.** – Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice
– Toute sous-famille d'une famille libre est libre

[GRI] p12 **Prop.** Une famille $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est liée (ssi) l'un au moins des vecteurs e_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

[GRI] p13 **Prop.** Une famille (e_i) est une base de E (ssi) tout élément x de E se décompose de façon unique sur les éléments de la famille.

EX: Les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Déf. Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie

EX. – $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie, $(1, X, \dots, X^n)$ en est une famille génératrice (c'est même une base).
– En revanche $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

RMQ: Une autre caractérisation des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie est donnée par le théorème de Riesz:
Th: Soit E un evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est de dimension finie (ssi) la boule unité fermée de E est compacte.

2. Théorème de la base incomplète

Th: Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de E, de cardinal n. Alors toute famille d'éléments de $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ de cardinal $n+1$, est liée. [RAM] p292

Cor: Soit (e_i) une famille génératrice finie, de cardinal n. Alors toutes les familles libres de E sont finies, et de cardinal $\leq n$.

APPLICATION * Soient A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie n. et $a \in A$. On peut montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non nul, tel que $P(a) = 0$ (P est un polynôme annulateur de a). [OA] p149

Th. de la base incomplète Soient $E \neq \{0\}$ de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice et $\mathcal{L}$ une famille libre telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. [GRI] p15-16

Cor: Sous les mêmes hypothèse, on a:
– De toute famille génératrice on peut extraire une base.
– Toute famille libre peut être complétée de manière à former une base.

RMQ: Cela prouve l'existence d'une base pour tout E de dimension finie.

Th/Déf: Soit E de dimension finie. Alors toutes les bases ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E sur $\mathbb{K}$ et noté $\dim_{\mathbb{K}} E$.

EX: • Par convention, $\dim\{0\} = 0$
• attention $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

[GRI] p19 **Th: Soit E de dimension n. Alors**
- **Toute famille génératrice à n éléments est une base.**
- **Toute famille libre à n éléments est une base.**

RMQ: permet de prouver qu'une famille est une base en ne prouvant que le caractère libre ou générateur.

[OA] p150 APPLICATION : * Soient E, G deux espaces vectoriels, F un sous-espace de E. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,G) \to \mathcal{L}(F,G) \\ f \mapsto f_{|F} \end{cases}$ est surjective.

3) Sous espaces vectoriels

[RAM] p295 **Th: Deux espaces vectoriels de dimensions finies sont isomorphes (ssi) ils sont de même dimension.**

[OA] p152 APPLICATION : * L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ du système différentiel linéaire $Y'(t) = A(t)Y(t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$ et $t \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est continue) forme un espace vectoriel de dim n.

★ [RAM] p297 **Th: Soient E de dimension finie n et F un sous-espace de E. Alors F est de dimension finie p avec $p \leq n$. De plus $\dim F = \dim E$ (ssi) $E = F$.**

[OA] p151 APPLICATION : * Une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est soit nulle, soit surjective.

[RAM] p297 **Th d'existence d'un supplémentaire Soient E de dimension finie et F un sous-espace de E. Alors F admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de F, $\dim F + \dim G = \dim E$.**

APPLICATION * Soit E de dim finie, soit F un sous-espace de E alors $\dim (E/F) = \dim E - \dim F$

RMQ: montrer l'égalité de deux espaces vectoriels de dimensions finies, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions

II - Rang et applications linéaires

Déf Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E (I peut être infini). Si le sous-espace de E engendré par (e_i) est de dimension finie r, on dit que (e_i) est de rang fini r et on écrit $rg\,(e_i)_{i\in I} = r$ [RAM] p298

1) Rang d'une application linéaire

Déf. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si l'image de f est de dimension finie r, on dit que f est de rang fini r, noté $rg f = r$. [RAM] p298-299

Prop: Soit $f : E \to F$ linéaire surjective. L'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.

Prop Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $e = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E telle que $rg\, e = r$. Alors $f(e)$ est une famille de vecteurs de F de rang fini r' tel que $r' \leq r$.

RMQ: Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $\dim E < \infty$. Si f est surjective alors $\dim F \leq \dim E$.

2) Théorème du rang

Théorème du rang **Soient E, F deux espaces vectoriels, E de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire. On a alors :** [GRI] p62-63

$$\dim E = rg f + \dim(\ker f)$$

Cor: Soient E, F de même dimension n et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f injective (ii) f surjective

(iii) $rg f = n$ (iv) f est bijective

RMQ: Ce résultat est faux en dimension infinie

CONTRE-EX L'application $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$ est surjective et non injective

[OA] p.153-154

APPLICATIONS : * Formule de GRASSMAN :
Soient E' et E'' deux sous-espaces de E, alors
$$\dim(E'\cap E'')+\dim(E'+E'') = \dim E' + \dim E''$$
* Interpolation de Lagrange soit $k\in\mathbb{N}^*$, on considère $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $b_1,\dots,b_k\in\mathbb{K}$
Alors, il existe un unique $P\in\mathbb{K}_{k-1}[X]$ tq $\forall i, P(a_i)=b_i$

III - Rang et matrices

1. Définition et premières propriétés

[RAM] p.327

Def : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A, noté $\mathrm{rg}A$, est le rang de la famille formée de ses vecteurs colonnes.

[RAM] p.328-329

Th : Soient E,F deux espaces vectoriels non nuls de dimensions respectives p et n, et $f:E\to F$ linéaire. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice qui représente f dans un couple $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ de bases de E et F. Alors
$$\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,f$$

Cor : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :
$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A=n$$

Cor : Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}\,{}^tA\leq\inf(n,p)$

Cor : Le rang d'une matrice est égal à celui de la famille formée de ses vecteurs lignes.

[GOU] p.317

APPLICATION [DVPT 1] Théorème des extrema liés
Soient $f, g_1,\dots,g_r : U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Notons $\Gamma=\{x\in U\,|\,g_1(x)=\dots=g_r(x)=0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a\in\Gamma$ et si les formes linéaires $dg_{1,a},\dots,dg_{r,a}$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ tq $df_a=\sum\lambda_i\,dg_{i,a}$

2. Action de Steinitz [DVP 2]

[COG] p.150,154 [MNE] p.36 [GOU 2] p.188

Def : Soit $G=GL_p(\mathbb{K})\times GL_n(\mathbb{K})$. L'action de Steinitz est l'action de G sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall((P,Q),M)\in G\times\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), (P,Q).M=PMQ^{-1}$

Def : Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes si elles appartiennent à la même orbite sous cette action. On note $A\sim B$.

RMQ : Si $A\sim B$, alors A et B représentent la même application dans des bases différentes.

Notation : $\forall r\in[\![0,\inf(p,n)]\!]$, $J_r=\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

Th : Soient $M\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $r=\mathrm{rg}(M)$. Alors $M\sim J_r$.
Pour $r\in[\![0,\inf(p,n)]\!]$, les J_r constituent un système de représentants des classes d'équivalences pour cette action.

Notation Il y a donc $(1+\inf(n,p))$ orbites, notées $(\mathcal{O}_r(\mathbb{K}))_{r\in[\![0,\inf(p,n)]\!]}$

Cor : $A\sim B \Leftrightarrow \mathrm{rg}A=\mathrm{rg}B$

Cor : $\forall r\in[\![0,\min(p,n)]\!]$, $\mathcal{O}_r(\mathbb{C})$ est connexe
$\forall r\in[\![0,\min(p,n)-1]\!]$, $\mathcal{O}_r(\mathbb{R})$ est connexe

Th : L'adhérence de $\mathcal{O}_r$ est $\bigsqcup_{k\leq r}\mathcal{O}_k$.

APPLICATION : * $GL_n(\mathbb{K})$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

3. Méthodes de calcul effectif

(i) Déterminants extraits

[RAM] p.373

Th : A est de rang r ssi tous les déterminants extraits de A de taille $r+1$ sont nuls et s'il en existe un de taille r non nul.

(ii) Pivot de Gauss

Principe : Par une succession d'opérations élémentaires, laissant invariant le rang de la matrice, on se ramène à une matrice échelonnée dont on sait déterminer le rang par simple lecture.

Bibliographie

[GRI] Joseph GRIFONE - Algèbre Linéaire 2e édition

[RAM] RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX - Cours de mathématiques spéciales - 1 - algèbre

[OA] BECK, MALICK et PEYRÉ - Objectif Agrégation 2e édition

[GOU] Xavier GOURDON - Analyse 2e édition

[MNE] MNEIMNÉ, TESTARD - Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques.

[GOU2] Xavier GOURDON - Algèbre 2e édition

IV - Extensions de corps

1. Degré d'une extension

Déf: Soient K, L des corps avec $K \subset L$. On dit que L est une extension de corps de K.

RMQ: Si K est un sous corps de L, L est un K-ev.

Déf: Si $\dim_K L$ est finie, on appelle le degré de L sur K, l'entier $[L:K]$ défini par $[L:K] = \dim_K L$

Th de la base téléscopique: Soient $K \subset L \subset M$ des corps, $(e_i)_{i\in I}$ une base de L sur K, $(f_j)_{j\in J}$ une base de M sur L. Alors la famille $(e_i f_j)_{I\times J}$ est une base de M sur K.

Cor: (multiplicativité du degré)
Sous les mêmes hypothèses, si les degrés sont finis, on a $[M:K] = [M:L][L:K]$

2. Extensions algébriques

Déf: Soit $K \subset L$ une extension et soit $\alpha \in L$. Considérons
$$\varphi : K[T] \to L \text{ tq } \varphi_{|K} = id \text{ et } \varphi(T) = \alpha.$$
- Si φ est injectif, α est dit transcendant sur K
- Sinon α est dit algébrique sur K. De plus,

$I = \operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal principal non nul : $I = (\pi_\alpha)$ avec $\pi_\alpha \neq 0$, supposé unitaire. π_α est le polynome minimal de α sur K.

Th: Soit $K \subset L$ une extension, $\alpha \in L$.
α est algébrique sur $K \Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < +\infty$
Dans ce cas, $\dim_K K[\alpha] = \deg \pi_{\alpha\,|K}$.

APPLICATION: Si α et β sont algébriques alors $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$ sont algébriques.