Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.

Cadre : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

I) Bases et dimension [GRI]

1) Familles libres, génératrices, bases

Déf : • Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite génératrice si $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I}) := \left\{ \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \mid (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \right\} = E$

• Elle est dite libre si $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$,
$\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0\right) \Rightarrow (\forall i \in I,\ \alpha_i = 0)$

Sinon elle est dite liée.

Prop : a) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
b) Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
c) Toute famille dont l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres est liée.

Déf : Une famille libre et génératrice est appelée base.

Ex : • $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ pour $e_i = (\delta_{ik})_{1\le k\le n}$
• $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$

Prop : • Si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est génératrice, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
• Si $(x_i)_{1\le i\le n}$ est libre, alors toute famille génératrice comporte au moins n vecteurs.

2) Espaces vectoriels de dimension finie

Déf : Si E admet une base de cardinal fini, on dit qu'il est de dimension finie. Sinon, il est dit de dimension infinie.

Ex : $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie.

151

Thm : a) De toute famille génératrice, on peut extraire une base.
b) Toute famille libre peut être complétée en une base.

Thm : Tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases qui ont toutes même cardinal fini n, que l'on appelle dimension de E.

Ex : • $\dim(\mathbb{K}^n) = \dim(\mathbb{K}_{n-1}[X]) = n$
• Pour $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue, l'ensemble des solutions au problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = A\,Y(t) \\ Y(0) = 0 \end{cases}$ est un espace vectoriel de dimension n.

Applications : Possibilité de preuves par récurrence sur la dimension comme pour la $\boxed{\text{réduction des endomorphismes auto-adjoints}}$. [GOU] DEV

Thm : Deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ sont isomorphes ssi ils ont même dimension.

Ex : Si $\dim_{\mathbb{K}}(E) = p$ et $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n$, alors $\mathcal{L}(E,F) \simeq \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, donc $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E,F)) = np$.

Thm : Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}^n$ est complet.

Prop : Dans un $\mathbb{R}$-ev ou $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Ex : $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Thm : Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev. Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire de E dans F est continue.

Thm : Soit E un $\mathbb{R}$-ev ou $\mathbb{C}$-ev. Alors :
$(\dim(E) < +\infty) \Longleftrightarrow (\mathcal{B}_E(0,1) \text{ est compacte})$

3) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Thm : Soit F un sev d'un ev E de dimension finie n. Alors F est de dimension finie avec $\dim(F) \le n$, et $\dim(F) = n$ ssi $E = F$.

Thm : Tout sev F de E admet au moins un supplémentaire G, et on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Prop : Soit F et G deux sev de E. Alors
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

<u>Corollaire</u> : $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ ssi $\begin{cases} \dim(E) = \sum_{\ell=1}^{k} \dim(E_\ell) \\ E = E_1 + \dots + E_k \end{cases}$

II) Rang et applications linéaires [GRI]

1) Rang d'une famille de vecteurs

<u>Déf</u> : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $(x_i)_{i\in I}$ la dimension de $\mathrm{Vect}((x_i)_{i\in I})$.

<u>Déf</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A, noté $rg(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

<u>Prop</u> : On a $rg(A) = rg({}^tA)$.

2) Rang d'une application linéaire

<u>Déf</u> : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si $\mathrm{Im} f$ est de dimension finie, on appelle rang de f l'entier : $rg(f) := \dim(\mathrm{Im} f)$.

<u>Prop</u> : (i) Si E ou F est de dimension finie alors $rg(f) < +\infty$
(ii) $rg(f) = \dim(E)$ ssi f est injective
(iii) $rg(f) = \dim(F)$ ssi f est surjective

<u>Thm du rang</u> : $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker} f) + rg(f)$

<u>Corollaire</u> : $\forall f \in \mathcal{L}(E)$, $(f \text{ injective}) \iff (f \text{ surjective}) \iff (f \text{ bijective}) \iff (rg(f) = \dim E)$

<u>Contre-Ex en dimension infinie</u> : $\Delta : \begin{array}{|l} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P \longmapsto P' \end{array}$ est surjective, mais pas injective.

<u>Application</u> : $\boxed{\text{Thm des extrema liés}}$ DEV [GOUAN]
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert non vide et soit $f, g_1, \dots, g_r \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soit $\Gamma := \{x \in U \mid g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si la famille $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ est libre, alors :

$$df(a) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \, dg_k(a).$$

<u>Déf</u> : Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors on dit que A et B sont <u>équivalentes</u>, et on note $A \sim B$, si $\exists (P,Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$, $A = PBQ$.

<u>Thm</u> : $\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ (A \sim B) \iff rg(A) = rg(B)}$. DEV [GOB]

<u>Application</u> : Le groupe $GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ via l'application $\varphi : \begin{array}{|l} GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ (P, Q) \longmapsto PBQ^{-1} \end{array}$ que l'on appelle action de Steinitz. Ainsi, les orbites sous cette action sont exactement les classes d'équivalence pour $\sim$

III) Calcul effectif du rang [GRI]

1) Méthode du pivot de Gauss

<u>But</u> : se ramener à une matrice échelonnée de même rang.

① Supprimer les lignes nulles et toute ligne colinéaire à une autre.

② Permuter les lignes pour se ramener à la forme suivante :
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ * & * & & \\ \vdots & & \ddots & \\ * & & & * \end{pmatrix}$ avec $a_{11} \neq 0$ (le "pivot").

③ $\forall i \in [\![2,n]\!]$, faire $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$. On obtient $A' = \left(\begin{array}{c|c} a_{11} & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$

<u>Réitérer</u> ces étapes sur B tant que $B \neq 0$ ou B de taille > 1.
Le rang de A est alors le nombre de lignes non nulles restantes.

<u>Rq</u> : Comme $rg(A) = rg({}^tA)$, on peut appliquer la même méthode sur les colonnes

2) Rang et systèmes linéaires

Déf : Un système linéaire est un système d'équations scalaires de la forme $AX = Y$ avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $Y \in \mathbb{K}^n$ fixés et $X \in \mathbb{K}^p$ l'inconnue.

Prop :
- Si $rg(A) = n$, le système possède des solutions pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$.
- Si $rg(A) = p$, s'il existe une solution alors elle est unique
- Si $rg(A) < p$, le système possède une infinité de solutions.

IV) Extensions de corps [PER]

Déf : Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps. On dit que L est une extension de K, et on note L/K, si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$.

Déf : $\mathbb{L}$ est alors muni d'une structure de $\mathbb{K}$-ev et on appelle degré de l'extension, noté $[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$, la quantité $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

Ex : $\mathbb{F}_{p^n}$ est un $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$-espace vectoriel de dimension n.

Thm de la base télescopique :
Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ des corps, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $(f_j)_{j\in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$. Alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.

Corollaire (Multiplicativité des degrés)
Avec ces notations, on a $[\mathbb{M}:\mathbb{K}] = [\mathbb{M}:\mathbb{L}][\mathbb{L}:\mathbb{K}]$.

Déf : Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. On note $\mathbb{K}[\alpha]$ le sous-anneau de $\mathbb{L}$ engendré par $\mathbb{K}$ et α, et $\mathbb{K}(\alpha)$ l'extension de $\mathbb{K}$ engendrée par α.

Déf : $\alpha \in \mathbb{L}$ est dit algébrique sur $\mathbb{K}$ si $\exists P \in \mathbb{K}[X]\setminus\{0\}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Dans ce cas, $\exists!\, \Pi_{\mathbb{K}}(\alpha) \in \mathbb{K}[X]$ irréductible unitaire tel que $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(\alpha) = 0\} = \left(\Pi_{\mathbb{K}}(\alpha)\right)$. $\Pi_{\mathbb{K}}(\alpha)$ est appelé polynôme minimal de α

Prop : Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{L}$. Alors :
$(\alpha$ algébrique sur $\mathbb{K}) \Leftrightarrow \left(\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] = \deg \Pi_{\mathbb{K}}(\alpha) < +\infty\right)$

Ex : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$

Déf : Soit $\mathbb{M}/\mathbb{L}/\mathbb{K}$ où $\mathbb{M}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{K}$. $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est dite séparable si $\forall \alpha \in \mathbb{L}$, $\Pi_{\mathbb{K}}(\alpha)$ est à racines simples dans $\mathbb{M}$.

$\boxed{\text{Thm de l'élément primitif}}$ DEV [DOU]
Toute extension séparable de degré fini est simple, i.e. : si $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ est séparable avec $[\mathbb{L}:\mathbb{K}] = n < +\infty$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{M}$, $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\alpha)$.

Prop : Soit $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $rg_{\mathbb{L}}(M) = rg_{\mathbb{K}}(M)$.

---

*Références :

- [GRI] Grifone
- [GOU] Gourdon, Algèbre
- [GOUAN] Gourdon, Analyse
- [PER] Perrin
- [DOU] Douady & Douady
- [GOB] Goblot, Algèbre linéaire