151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Motivations : Retrouver des résultats qu'on avait sur les ensembles finis (équivalence entre injectivité et surjectivité etc.)
Avoir une description finie d'un ensemble infini.

I Théorie de la dimension

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

Def 1 : Une famille A de E est dite génératrice si $E = Vect(A)$.

Ex 2 : E est une famille génératrice de E, $\mathbb{S}^{n-1}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Def 3 : E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Def 4 : Une famille finie $\{v_1 \dots v_p\}$ de E est dite libre si :
$\forall \lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{K}, \ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$
Sinon, la famille est dite liée.

Ex 5 : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ est liée dans $\mathbb{R}^3$

Def 6 : Une famille finie de E est une base si elle est libre et génératrice.

Ex 6 : $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, $\{X^n, X^{n-1}, \dots, X, 1\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Prop 7 :
* Toute famille contenant une famille génératrice (resp. liée) est génératrice (resp. liée).
* Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Th 8 : Soit L une famille libre de E et G une famille génératrice finie de E telles que $L \subset G$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Th 9 : Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal. On appelle ce cardinal la dimension de E, et on le note dim E.

Cor 10 : Si E est de dimension finie, alors, avec $\dim E = n$:
* Toute famille de strictement moins de n vecteurs est non génératrice.
* Toute famille de strictement plus de n vecteurs est liée.

DEV 1 : Théorème de la base de Burnside :
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et G un p-groupe (ie $|G| = p^n$). Alors toutes les parties génératrices minimales de G ont le même cardinal.

Th 11 : Si E est de dimension finie n, alors toute famille libre ou génératrice de n vecteurs est une base de E.

Th 12 : Deux espaces vectoriels de dimension finies sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.

Ex 13 : $\mathbb{R}_n[X] \simeq \mathbb{R}^{n+1}$

Ex 14 : Soit $x_1 \dots x_{n+1} \in \mathbb{R}$ distincts. Les polynômes de Lagrange associés aux points $x_1 \dots x_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Prop 15 : Soit E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et H un sous-espace vectoriel de E. Alors :
* $\dim E \times F = \dim E + \dim F$
* $\dim H \leq \dim E$, avec égalité si et seulement si $H = E$.
* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$
* $\dim E^* = \dim E$

Prop 16 : Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E. Alors $\dim F + G = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.

Cor 17 : Soit E de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors sont équivalents :
* $E = F \oplus G$
* $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F \cap G = \{0\}$
* $\dim E = \dim F + \dim G$ et $F + G = E$

On dit alors que G est un supplémentaire de F dans E.

Th 18 : Si E est de dimension finie et F est un sous-espace vectoriel de E, alors F admet un supplémentaire dans E, et tous les supplémentaires de F dans E sont de même dimension.

Ex 19 : Une forme linéaire sur E est entièrement déterminée par son noyau et l'image d'un vecteur qui n'est pas dans son noyau.

II Rang et applications

1) Théorème du rang

Def 20 : On appelle rang d'une application linéaire $f : E \to F$ la dimension de $\mathrm{Im} f$. On le note $\mathrm{rg}(f)$.

Th 21 : Soit E et F deux espaces vectoriels, $\dim E < +\infty$. Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors $\dim E = \mathrm{rg} f + \dim(\mathrm{Ker} f)$.

Ex 22 : le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan.

Cor 23 : Soit E et F deux espaces vectoriels de même dimension (finie), et $f : E \to F$ linéaire. Alors sont équivalents :
* f est injective
* f est surjective
* f est bijective

C-ex 24 : $d : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective mais pas injective

$m : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto XP$ est injective mais pas surjective

Cor 25 : Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \to F$ linéaire.
* Si f est injective, alors $\dim E \leq \dim F$
* Si f est surjective, alors $\dim F \leq \dim E$

Cor 26 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $f_1 \dots f_r$ des formes linéaires sur E. Alors : $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker} f_i\right) \geq n - r$ avec égalité si et seulement si la famille $\{f_1 \dots f_r\}$ est libre dans E^*.

Ex 27 : $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y + z = 0\}$ est de dimension 1.

Cor 28 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\dim E/F = \dim E - \dim F$.

Def 29 : Soit E un espace vectoriel, $A \subset E$. On appelle rang de A la dimension de $\mathrm{Vect}(A)$.

Def 30 : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On appelle rang de M le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Ex 31 : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Prop 32 : Soit E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Soit $f : E \to F$ linéaire. Alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f)) = \mathrm{rg} f$

2) Caractérisations du rang

Th 33 : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $J_{n,m,r} = \begin{array}{c} \overset{r}{\longleftrightarrow} \quad \overset{m-r}{\longleftrightarrow} \\ \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array}$. Alors $\mathrm{rg} M = r$ si et seulement si M est équivalente à $J_{n,m,r}$.

Ex 34 : On peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour calculer $\mathrm{rg} M$ et pour trouver $P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $PMQ = J_{n,m,r}$.

Prop 35 : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors le rang de M est la taille de la plus grande sous-matrice carrée inversible de M.

Cor 36 : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg} M = \mathrm{rg}\, {}^t M$.

Cor 37 : Soit $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{L}$ une extension de $\mathbb{K}$. On note $\tilde{M}$ la matrice M vue dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{L})$. Alors $\mathrm{rg} M = \mathrm{rg} \tilde{M}$.

Th 38 : Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $R_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{rg} M = k\}$. Alors $\overline{R_k} = \bigsqcup_{0 \leq i \leq k} R_k$. En particulier $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 39 : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{rg}\left(\frac{1}{k} I_n\right) = n$ et $\frac{1}{k} I_n \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$.

III Quelques applications

1) Réduction des endomorphismes

Prop 40 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f de multiplicité algébrique $\alpha \geq 1$. Soit E_λ le sous-espace propre de f associé à λ. Alors $\dim E_\lambda \leq \alpha$.

Th 41 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda_1 \dots \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de f, de multiplicité algébriques respectives $\alpha_1 \dots \alpha_p$. Sont équivalents :
* f est diagonalisable
* $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}$
* $\dim E = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_p}$
* $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i$

Ex 42 : Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé simple est diagonalisable.

2) Espaces de solutions

Prop 43 : L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ vérifiant l'équation de récurrence $\begin{cases} u_{n+d} = a_{d-1}u_{n+d-1} + \dots + a_0 u_n \\ u_0, \dots, u_{d-1} \in \mathbb{K} \end{cases}$ avec $a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de dimension d.

Prop 44 : L'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène $y^{(d)} + a_{d-1}y^{(d-1)} + \dots + a_1 y = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^d(\mathbb{R})$ de dimension d.

Ex 45 : L'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$ est $\mathrm{Vect}\{\sin, \cos\}$

3) Applications en analyse

Th 46 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

C-ex 47 : Sur $\mathbb{R}[X]$, les normes $N_1 : \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \mapsto \max_{0\le i\le d} |a_i|$ et $N_2 : \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \mapsto \sum_{i=0}^{d} |a_i|$ ne sont pas équivalentes.

Prop 48 : Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors les compacts de E sont exactement les fermés bornés.

Prop 49 : Soit E et F deux espaces vectoriels normés, E de dimension finie. Alors toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Th 50 : Soit E un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Def 51 : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$. On dit que le système $x' = Ax + Bu$ est contrôlable en temps $T \in \mathbb{R}_+^*$ si pour tout $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe $u \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}^m)$ tel que l'unique solution du système $\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ vérifie $x(T) = x_1$

Th 52 : Le système $x' = Ax + Bu$ est contrôlable en temps T pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\mathrm{rg}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$.

4) Applications en géométrie et en arithmétique.

DEV 2 : Théorème de Carathéodory et application.

Th 53 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n. Soi $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. Alors l'enveloppe convexe de A est : $\mathrm{Conv}(A) = \{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \mid \lambda_1 \dots \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+,\ a_1 \dots a_{n+1} \in A,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \}$

Cor 54 : Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$. Alors le système diophantien $Ax = 0$ admet une solution dans $\mathbb{N}^m$ si et seulement si $0_{\mathbb{R}^n}$ est dans l'enveloppe convexe des colonnes de A.

5) Extensions de corps

Def 55 : Soit K un corps. On dit qu'un corps L est une extension de K si $K \subset L$. On note $L|K$.

Ex 56 : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Prop 57 : Soit K un corps, L une extension de K. Alors L a une structure de K-espace vectoriel. On note $[L:K]$ sa dimension, et on l'appelle degré de $L|K$.

Th 58 : Soit K un corps et $L|K$ et $F|L$ des extensions de degrés finis. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de F en tant que L-espace vectoriel et $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ une base de L en tant que K-espace vectoriel. Alors $\{\alpha_j e_i \mid j \in [\![1,m]\!], i \in [\![1,n]\!]\}$ est une base de F en tant que K-espace vectoriel.

Cor 59 : Soit K un corps et $L|K$ et $F|L$ deux extensions. Alors $[F:K] = [F:L]\cdot[L:K]$

Références :

- Caldero, Germoni, NH2G2, Tome 1
- Gourdon, Analyse
- Gozard, Théorie de Galois
- Grifone, Algèbre linéaire
- Pommelet, Analyse pour l'agrégation
- Trélat, Contrôle optimal
- Zavidovique, Un max de maths