151

Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

On prend K un corps commutatif, E un K-espace vectoriel

# I] Dimension d'un espace vectoriel

## I.1) Familles libres, génératrices, bases

Si $I$ est un ensemble, on note $K^{(I)}$ les familles de $K^I$ dont les éléments sont nuls sauf un nombre fini.

**Définition 1:** $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite :
- libre si $\forall (\lambda_i) \in K^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$

Dans le cas contraire, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est liée.
- génératrice si $\forall x \in E, \exists (\lambda_i) \in K^{(I)}, x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$
- une base si elle est libre et génératrice.

**Définition 2:** Si E admet une famille génératrice finie, on dit qu'il est de dimension finie ; sinon, E est de dimension infinie.

**Exemple 3:** - La base canonique $(e_i) \in K^n$ est une base de $K^n$
- $(e_1, 2e_1)$ est liée, pas génératrice dans $K^2$.
- $K^n$ est de dimension finie, $K[X]$ de dimension infinie.

**Proposition 4:** $(x_i)_{i\in I}$ est une base si et seulement si $\forall x \in E, \exists ! (\lambda_i) \in K^{(I)}, \quad x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

Dans la suite, on supposera E de dimension finie

**Proposition 5:** - Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée / génératrice est liée / génératrice.

**Théorème 6** (existence de bases) : Supposons $E \neq \{0\}$, G une famille génératrice et $L \subset G$ une famille libre. Alors il existe $L \subset B \subset G$ une base de E.

**Remarque 7:** Ce théorème reste vrai en dimension infinie, mais sa preuve requiert l'axiome du choix

**Corollaire 8** (Théorème de la base incomplète) : Toute famille libre de E peut être complétée par un nombre fini d'éléments pour former une base de E.

**Théorème 9:** Toutes les base de E ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E ou $\dim_K(E)$, ou $\dim(E)$.

Ce théorème utilise le résultat suivant :

**Lemme 10:** Supposons G génératrice de cardinal $n$. Alors toute famille de taille $\geq n+1$ est liée.

**Remarque 11:** La dimension dépend du corps de base : $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ ($(1,i)$ est une base), mais $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$

**Corollaire 12:** - Toute famille de taille $> \dim(E)$ est liée
- Aucune famille de taille $< \dim(E)$ n'est génératrice.

**Application 13:** Soit $A \in M_n(K)$. Alors $\exists P \in K[X]$, $P(A) = 0$.

**Proposition 14:** Soient $E_1 \cdots E_p$ des K-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim(E_1 \times \cdots \times E_p) = \dim(E_1) + \cdots + \dim(E_p)$.

**Corollaire 15:** $\dim(K^n) = n$

**Théorème 16:** Soit $n = \dim_K(E)$. Alors E est isomorphe à $K^n$.

**Corollaire 17:** Deux espaces vectoriels sur K de dimension finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.

## I.2) Sous-espace vectoriel

**Théorème 18:** Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie, et $\dim_K(F) \leq \dim_K(E)$. De plus, $\dim_K(F) = \dim_K(E) \Leftrightarrow F = E$.

**Définition 19:** • Soient $F_1 \cdots F_p$ des sous-espaces de E. On appelle leur somme l'ensemble
$$F_1 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid x_1 \in F_1 \cdots x_p \in F_p\}.$$

• On dit que cette somme est directe si $\forall x \in E$, $\exists ! (x_1 \cdots x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
On la note alors $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

• Pour $p=2$, on dit alors que $F_2$ est un supplémentaire de $F_1$.

<u>Proposition 20:</u> Tout sous-espace F de E admet un supplémentaire, de dimension $\dim(E) - \dim(F)$.

<u>Exemple 21:</u> - dans $K^2$, $\mathrm{Vect}(e_1)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(e_2)$.
- $M_n(K) = S_n(K) \oplus A_n(K)$ les matrices symétriques et antisymétriques.

<u>Théorème 22:</u> $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la somme des $F_i$ est directe, et $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$

<u>Théorème 23:</u> $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi pour toutes bases $B_1 \cdots B_p$ de $F_1 \cdots F_p$, leur union est une base de E.

## I.3) Quotient d'espace vectoriel

<u>Proposition 24:</u> Soit F un sous-espace de E. On pose la relation sur E: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$. Alors $E/F := E/\sim$ est un K-espace vectoriel pour les lois ~~indui~~ quotient, et la projection est une application linéaire.

<u>Définition 25:</u> Soit E un espace vectoriel quelconque, F un sous-espace de E. On dit que F est de codimension finie si E/F est de dimension finie, notée codim(F).

<u>Proposition 26:</u> Si S est un supplémentaire de F dans E, on a $\dim(S) = \mathrm{codim}(F)$.

<u>Corollaire 27:</u> $\dim(E) = \dim(F) + \mathrm{codim}(F)$.

# II] Applications Linéaires

Soient $E_1, E_2$ deux K-espaces vectoriels de dimension n et m. On rappelle que $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ est un K-espace vectoriel de dimension $n \times m$, et que $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ est entièrement déterminée par l'image d'une base de $E_1$.

## II.1) Rang

<u>Définition 28:</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. On appelle rang de f le nombre : $rg(f) := \dim_K(\mathrm{Im}(f))$.

<u>Théorème 29:</u> Soit $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $E_1/\mathrm{Ker}(f)$.

<u>Corollaire 30</u> (théorème du rang):

$$\dim_K(E_1) = rg(f) + \dim_K(\mathrm{Ker}(f)).$$

DEV1

<u>Application 31</u> (théorème de Carathéodory): Tout point de l'enveloppe convexe de $A \subset \mathbb{R}^n$ est un barycentre à poids positifs de n+1 points de A.

<u>Corollaire 32:</u> Supposons $\dim(E_1) = \dim(E_2)$. Alors $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ injective $\Leftrightarrow$ surjective $\Leftrightarrow$ bijective.

<u>Exemple 33:</u> Faux en dimension infinie; par exemple, dans $\mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective linéaire, mais pas injective.

<u>Application 34</u> (Interpolation de Lagrange): Soient $(x_0, y_0) \cdots (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$, $x_0 \cdots x_n$ distincts. Alors $\exists ! P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall i \in \{0 \cdots n\}$, $P(x_i) = y_i$.

<u>Application 35</u> (Formule de Grassman):

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

## II. 2) Dualité

**Définition 36:** On note $E^* := \mathcal{L}(E, K)$ les formes linéaires, ou dual, de $E$.

**Proposition 37** (base duale) : Soit $(e_1 \cdots e_n)$ une base de $E$. Alors $e_k^* : x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \lambda_k$ forment une base de $E^*$.

**Corollaire 38:** $\dim_K(E) = \dim_K(E^*)$.

**Définition 39:** Si $v \in E^* \setminus \{0\}$, son noyau est de dimension $\dim(E)-1$ ; on l'appelle hyperplan de $E$.

**Exemple 40:** $K^{n-1} \times \{0\}$ est un hyperplan de $K^n$.

## II. 3) Invariants de similitude

**Définition 41:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit $E_x := \{ P(f)(x) \mid P \in K[X] \}$.
Si il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$, on dit que $f$ est cyclique.

**Définition 42:** $P_x$ est le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P_x(f)(x) = 0$, et $\Pi_f$ est le polynôme minimal de $f$.

**Proposition 43:** $\exists x \in E$, $P_x = \Pi_f$.

**Proposition 44:** Soit $x \in E$. Si $\deg(P_x) = k$, alors $(x, f(x) \cdots f^{k-1}(x))$ est une base de $E_x$.
En particulier, si $f$ est cyclique, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x) \cdots f^{n-1}(x))$ est une base de $E$.

DEV 2

**Théorème 45** (réduction de Frobenius) : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $F_1 \cdots F_r$ sous-espaces de $E$ stables par $f$ tels que :
1) $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$
2) $\forall i \in \{1 \cdots r\}$, $f_{|F_i}$ est cyclique
3) Si $P_i$ est le polynôme minimal de $f_{|F_i}$, $P_{i+1} \mid P_i$

De plus, $P_1 \cdots P_r$ ne dépendent pas du choix de $F_1 \cdots F_r$ ; on les appelle invariants de similitude de $f$.

## III] Matrices

On note, si $f \in \mathcal{L}(E)$, $[f]_B$ la matrice de $f$ dans la base $B$.

**Définition 46:** Le rang d'une matrice est le rang de son endomorphisme associé sur $K^n$ dans la base canonique.

**Proposition 47:** Le rang est invariant par multiplication (à gauche ou droite) par une matrice inversible, et par transposition.

**Proposition 48:** Le rang de $M$ est le plus grand entier $r$ tel qu'il existe une sous-matrice de $M$ inversible de taille $r$.

**Définition 49:** Soient $M, N \in M_n(K)$. On dit que $M, N$ sont :
- équivalentes, ou $M \sim N$, si $\exists P, Q \in GL_n(K)$, $M = PNQ$
- semblables si $\exists P \in GL_n(K)$, $M = PNP^{-1}$.

**Proposition 50:** $M \sim N \Leftrightarrow rg(M) = rg(N)$

**Définition 51:** Soit $P \in K[X]$ unitaire de degré $n$, $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i + X^n$. Alors on pose $\mathcal{C}(P) := \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ la matrice compagnon de $P$.

**Proposition 52:** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. Alors il existe une base $B$ de $E$ telle que $[f]_B = \mathcal{C}(\Pi_f)$.

**Théorème 53:** Si $P_1 \cdots P_r$ sont les invariants de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe $B$ une base de $E$ telle que

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{C}(P_r) \end{pmatrix}$$