I/ Théorie de la dimension

Cadre 1 : on considère E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

① familles génératrices, familles libres.

déf 2 : Soit $A \subset E$. On dit que A est une partie génératrice (resp $(a)_{a\in A}$ est une famille génératrice) si $\mathrm{vect}\, A = E$.

ex 3 : $(P)_{P\in \mathbb{K}[X]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$

déf 4 : Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est libre si toute combinaison linéaire (C.L) $\sum_I \alpha_i x_i = 0$ vérifie $\alpha_i = 0 \ \forall i$.
Sinon, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est liée.

ex 5 : $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Contre ex 6 : $\binom{1}{1}$ et $\binom{-2}{-2}$ sont liés dans $\mathbb{R}^2$.

Appl 7 : le wronskien ne s'annule pas

Prop 8 : i) toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
ii) toute sous famille d'une famille libre est libre.

② base et dimension d'un espace vectoriel

déf 9 : une famille libre et génératrice de E est appelée base de E.

prop 10 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E alors tout x de E s'écrit de manière unique comme C.L. des $(e_i)_{i\in I}$

ex 11 : $(e_i)_{i\in I}$ où $e_i = (0,\dots,\underset{(i)}{1},0\dots0)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique.

déf 12 On dit que E est de dimension finie (DF) s'il existe une famille génératrice finie de E.

ex 13 : $\mathbb{K}^n$ est de DF. On suppose E de DF à partir de mtn

Thm 14 : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) génératrice. Soit J fini $\subset I$ tq $(e_i)_{i\in J}$ soit libre alors il existe une partie A finie de I, $J\subset A$ tq $(e_i)_{i\in A}$ soit une base de E.

Corollaire 15 (existence de base) E possède des bases.

Cor. 16 (thm de la base extraite) Soit S une partie génératrice de E alors il existe une famille libre de S qui forme une base de E

Cor 17 (thm de la base incomplète) Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E

Appl 18 : $\dim F + \dim F^\circ = \dim E$ où $F\subset E$

Thm 19 : Soit S une partie génératrice finie et $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de E alors I est fini et $|I|\leq|S|$

Cor. 20 : toutes les bases de E sont finies et ont le même nb de vecteurs.

déf 21 : on définit la dimension du $\mathbb{K}$ev E notée $\dim E$ comme étant le nb commun de vecteurs de toutes les bases de E.

Ex.22 : $\dim \mathbb{K}^n = n$, dim. de l'espace de solutions d'une EDH

③ sous espace vectoriel d'un ev. de DF

Thm 23 : Soit F un sev de E alors F est de DF et $\dim F \leq \dim E$
De plus : $\dim E = \dim F \iff F = E$

App 24 : Soit E un evn de DF tout sev F de E est fermé dans E.

prop 25 : Soit $E_1 - E_k$ sev de DF de E (non nécessairement fini) On suppose $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_k$ alors E est de DF et $\dim E = \dim E_1 + \dots + \dim E_k$

Appl 26 unicité des invariants de similitude de Frobenius.

prop : 27 : Soit F un sev de E alors F possède un supplémentaire dans E de dimension $\dim E - \dim F$.

prop. 28 : (Formule de Grassmann) F, G deux sev de E alors $F+G$ est de dim finie et $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)$.

Appl 29 minoration de la dim. d'une intersection finie d'hyperplans.

④ applications linéaires et dimension

prop : 30 : L'image d'une famille libre (resp. génératrice) par une application linéaire injective (resp. surjective) est libre (resp. génératrice)

Prop 31 deux ev sont isomorphes $\iff$ ils ont même dimension

Appl 32 unicité du corps fini à p^n éléments

Prop 33 : Soit E et F deux $\mathbb{K}$ ev de dim finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de DF et $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Cas particulier important 34 : $\dim E^* = \dim E$

II | Rang et applications linéaires

① définitions et résultats généraux

Déf 34 : Soit E, F deux $\mathbb{K}$ev de DF soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ on définit le rang de u noté $rg\, u$ comme étant dim(Im u).

Ex 35 : Soit F, G $F \oplus G = E$ alors le projecteur p sur F et parallèlement à G. On a $rg\, p = \dim F$.

Déf 36 soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E on définit le rang de $(x_i)_{i \in I}$ noté $rg(x_i)$ par $\dim \mathrm{vect}(x_i)$.

Thm 37 (du rang) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\dim E = \dim \ker u + rg\, u$.

Appl : 38 degré du polynôme minimal.

Prop 39 : Soit E, F tq $\dim E = \dim F$. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors : u injective $\iff$ u surjective $\iff$ u bijective

Contre ex 40 : en dimension infinie $f : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \to (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est surjective mais pas injective.

Appl. 41 : polynômes interpolateurs de Lagrange.

② caractérisation et calcul pratique du rang.

Thm 42 : Soit $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ A et B sont équivalentes $\iff$ $rg A = rg B$

App 43 : le rang est un invariant total pour les orbites de formes quadratiques sur $\mathbb{C}$.

Thm 44 : Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ le rang de A est la taille de la + grande des matrices carrés extraites de A.

Appl 45 : extrema liés

Thm 46 : (Pivot de Gauss) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E. En agissant sur $(f_1 \dots f_n)$ par des opérations élémentaires, on se ramène à une nouvelle base $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$ échelonnée dans $(e_1, \dots, e_n)$

Appl 47 : Soit $G \subset E^*$ alors $\dim G + \dim G^\circ = \dim E$

Appl 48 : $A \in M_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A] \iff \mu_A = \chi_A$ où $\mathcal{C}(A)$ est le commutant de A.

③ forme linéaires

Prop 49 le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan

Appl. 50 théorème de Riesz.

III | raisonnement par récurrence sur la dimension de l'espace

① en analyse

Thm 51 (Carathéodory) Soit E un $\mathbb{R}$ev de dim n $\lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ $\sum \lambda_i = 1$ et $x_1, \dots, x_p \in E$ soit $x = \sum_{i=1} \lambda_i x_i$ alors $\exists I \subset \{1, \dots, p\}$ tq $\# I \leq n+1$ et tq x soit le barycentre des $(x_i)_{i \in I}$ affecté de coefficients positifs.

App 52 : Soit E $\mathbb{R}$ev n de DF et A compact de E alors $\mathrm{conv}(A)$ est compacte.

② en réduction

Thm 53 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ il existe $F_1 - F_r$ des sev de E stables par u tq

i) $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ $u_i = u_{|F_i}$ est cyclique

ii) $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $P_{i+1} | P_i$ $\forall i \in \{1, \dots, r-1\}$

iii) si $P_i := \mu_{u_i}$

la suite $P_1 - P_r$ ne dépend que de u,

Corollaire 54 : si $P_1 - P_r$ suite des invariants de similitude de $u \in \mathcal{L}(E)$ $\exists B$ base de E tq

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} C(P_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

où $C(P) = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$ $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$

Cor 55 deux endo. u et $v \in \mathcal{L}(E)$ sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude.

IV / extension de corps et dimension

déf 56 soit K, L des corps $K \subset L$. L est une extension de K.

Ex 57 : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Rmq 58 : si K est un sous corps de L, L est un K-ev

déf 59 si $\dim_K L < +\infty$ $[L:K] := \dim_K L$ s'appelle le degré de L sur K.

Thm 60 (multiplicativité du degré) soit $K \subset L \subset M$ alors $[M:K] = [M:L][L:K]$.

App 61 à une certaine puissance de 2, les nombres constructibles sont rationnelles.

déf 62 : soit $K \subset L$ une extension et soit $\alpha \in L$ soit $\varphi : K[X] \longrightarrow L$, $X \longmapsto \alpha$

1) si φ est injectif, α est transcendant sur K

2) sinon α est algébrique sur K.

Thm 63 : soit $K \subset L$ une extension, $\alpha \in L$

α algébrique sur $K \iff K[\alpha] = K(\alpha)$

$\iff \dim_K K[\alpha] < +\infty$.

App 64 : si $K \subset L$ une extension $\{x \in L, x$ est algébrique sur $K\}$ est un sous corps de L.