Déterminants. Exemples et applications.
Leçon 152 (ex 123)

Cadre : R un anneau commutatif, E un R-module et $n \in \mathbb{N}^*$.

[GOURDON] p134

I - Définitions, premières propriétés.

Déf 1 : $f : E^n \to R$ est une forme n-linéaire si elle est linéaire en chaque variable.
Si $x_i = x_j$ pour $i \neq j \Rightarrow f(x_1, .., x_n) = 0$, on dit que f est alternée.

Prop 2 : Soit $f : E^n \to R$, n-linéaire alternée.
* $\forall i \neq j$, $f(.., x_i, .., x_j, ..) = -f(.., x_j, .., x_i, ..)$
* $\forall \sigma \in S_n$, $f(x_{\sigma(1)}, .., x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).f(x_1, .., x_n)$
* $\forall \lambda \in R$, $\forall j \neq i$, $f(.., x_i + \lambda x_j, ..) = f(.., x_i, ..)$

Déf 3 : On appelle déterminant l'unique application n-linéaire alternée $M_n(R) \to R$ tq $\det(I_n) = 1$, où $M_n(R)$ est vu comme $(R^n)^n$.

Formule 4 : On a la formule suivante :
$\forall A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$, $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$.

App 5 : Le déterminant est irréductible en tant que polynôme de ses coefficients. Dev

Not 6 : Si $(e_1, .., e_n)$ est la base canonique de R^n, et $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$,
on note $\det(x_1, .., x_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Prop 7 : $\forall (A, B) \in M_n(R)^2$,
* $\det({}^tA) = \det(A)$
* $\det(AB) = \det(A).\det(B)$.

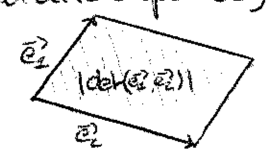
Déf 8 : $A \in M_n(R)$, $A = (a_{ij})$.
* On appelle mineur de a_{ij} le déterminant de taille $n-1$ de la matrice $(a_{k,l})_{k \neq i, l \neq j}$. On le note Δ_{ij}.
* On appelle comatrice la matrice $n \times n$ de coefficients $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$, notée $\mathrm{com}(A)$.

Lemme 9 : $\forall A \in M_n(R)$,
${}^t\mathrm{com}(A).A = A.{}^t\mathrm{com}(A) = \det(A).I_n$.

Thm 10 :
* Si R est intègre, alors $\forall (x_1, .., x_n) \in (R^n)^n$, $(x_1, .., x_n)$ est liée $\Leftrightarrow \det(x_1, .., x_n) = 0$.
* Soit $A \in M_n(R)$.
A est inversible $\Leftrightarrow \det(A) \in R^\times$.
Alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

Déf 11 : Si E est un $\mathbb{K}$-ev, $u \in \mathcal{L}(E)$, B une base de E, alors $\det(\mathrm{Mat}_B(u))$ ne dépend pas de B. On appelle cette quantité le déterminant de u.

Rem 12 : Le déterminant d'une famille de vecteurs correspond au volume (au signe près) du parallélotope défini par ces vecteurs.



[GouAl] p137

II - Calcul effectif.

1) Algorithmique.

La formule 4 nous donne un algorithme de calcul en $O(n.n!)$.

Prop 13: Développement selon une colonne.
Soit $A=(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(R)$,
$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \Delta_{ij} a_{ij}$ (selon j-ème colonne).

On obtient un algorithme en $O(n!)$.

Prop 14: Si R est intègre, la méthode d'élimination de Gauss (échelonnement de la matrice) nous donne un algorithme de calcul en $O(n^3)$.

2) Déterminants remarquables.

- Vandermonde:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j} (a_j - a_i).$$

App 15: Inversion de la transformée de Fourier rapide.

- Déterminant de Cauchy:
$(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{K}$ corps tq $\forall (i,j)$, $a_i+b_j \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i<j} (a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j} (a_i+b_j)}.$$

III - Applications.

1) En algèbre.

[GouAl] p162.

$R = \mathbb{K}$ corps, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ $\det(A - XI_n) =: \chi_A(X)$.

App 17: Si $n=2$,
$\chi_A(X) = X^2 - \mathrm{Tr}(A).X + \det A$.

Prop 18: Caractérisation du spectre.
$\lambda \in Sp(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0$

Thm 19: (Cayley-Hamilton).
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(A) = 0$.

Déf 20: On appelle rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(R)$ le plus grand entier $r \geq 0$ tel qu'il existe un mineur de taille r non nul. [Gri] p161

Cor 21: $rg({}^tA) = rg(A)$.

2) En géométrie.

[Tau]

Prop 22: Soit $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{K}^3$, $1 \leq i \leq 4$.
Ces 4 points sont coplanaires

$$\iff \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

[Gri 167] **Déf 23** : Ici, $R = \mathbb{R}$.
On dit que $u \in GL(E)$ préserve l'orientation lorsque $\det(u) > 0$.
On définit la notion d'orientation de E par la donnée d'une base B de E.
On dit alors qu'une base B' est directe si $\mathrm{Mat}_B B'$ préserve l'orientation.

[GouAl] p263 **Déf 24** : E espace préhilbertien.
Pour $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on note
$G(x_1, \dots, x_n) = \det((\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j})$
le déterminant de Gram des $(x_i)_{i=1}^n$.

Thm 25 : E préhilbertien, V sev muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
$\forall x \in E, \quad d(x, V)^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

[GouAn] 286 **App 26** : (Thm de Müntz). $\boxed{\text{Dev}}$
$E = C([0;1], \mathbb{R})$. $(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ $\nearrow$.
$\mathrm{Vect}(x^{\alpha_n})$ dense dans $E \iff \sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

3) En analyse

Prop 27 : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
L'application $\det : \mathbb{K}^{n^2} \to \mathbb{K}$ est polynomiale, donc lisse.

App 28 : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

Déf 29 : $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (U ouvert). [GouAn] p303
f différentiable en $a \in U$.
On appelle Jacobien de f en a le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$. Not : $J(f)(a)$.

Thm 30 : Changement de variables. [GouAn] p325
U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$, U mesurable, φ C^1-difféomorphisme de U sur V, dont le jacobien est borné sur U. Alors V mesurable, et $\forall f : V \to \mathbb{R}$ continue bornée,
$$\int_V f(v)\,dv = \int_U f(\varphi(u))\,|J(\varphi)(u)|\,du.$$

Lem 31 : Soient $(f_1, \dots, f_n) : E \to \mathbb{K}$ corps. [GouAl] p151.
$(f_1, \dots, f_n)$ est libre $\iff \exists (x_j)_{j=1}^n \ / \det(f_i(x_j)) \neq 0$.

Thm 32 : $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. [Lei] p52
Les sous espaces de dimension finie stables par translations sont les solutions d'une équation différentielle linéaire de degré n. $\boxed{\text{Dev}}$

Références :

[GouAl] : Gourdon, Algèbre.
[GouAn] : Gourdon, Analyse.
[Gri] : Grifone, Algèbre Linéaire.
[Tau] : Tauvel, Géométrie
[Lei] : Leichtnam, Exercices X-ENS, Analyse.