152 Déterminant. Exemples et applications.

Soit $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, $E_{(i)}$ un $\mathcal{A}$-module.

I. Définitions et généralités.

Déf 1 $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to \mathcal{A}$ est dite <u>n-linéaire</u> ssi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots x_n \in E_1 \times \ldots \times E_{k-1} \times E_{k+1} \times \ldots \times E_n$,
$$f : \begin{cases} E_k \to \mathcal{A} \\ x \mapsto f(x_1, \ldots x_{k-1}, x, x_{k+1} \ldots x_n) \end{cases} \text{ est linéaire}$$

Déf. 2 : $f : E^n \to \mathcal{A}$ est dite <u>alternée</u> si $\forall i \neq j$, $x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ et <u>antisymétrique</u> ssi $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)}, \ldots x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_n)$

Prop 1 : $f : \mathcal{M}_{n,n}(\mathcal{A}) \cong (\mathcal{M}_{n,1}(\mathcal{A}))^n \to \mathcal{A}$ est n-linéaire et alternée, alors f est antisymétrique, et entièrement déterminée par $f(I_n)$. On note <u>dét</u> l'unique forme n-linéaire alternée valant 1 en I_n.

Prop 2 : $\forall M = (m_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$:
$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{i,\sigma(i)} \qquad (*)$$

Prop. 3 $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$, $\lambda \in \mathcal{A}$:
(i) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
(ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(iii) $\det({}^tA) = \det(A)$ (<u>Remarque</u> : dét est donc n-linéaire en les lignes de A)

Notation 1 : soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $x_1, \ldots x_n \in E$ / $\forall j$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$. On note
$$\det(x_1 \ldots x_n) := \det((x_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \ldots & x_{1,n} \\ | & & | \\ x_{n,1} & \ldots & x_{n,n} \end{vmatrix}$$

Notation 2 : soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La quantité $\det(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ (d'après (iii)). On la note $\boxed{\det(u)}$

Prop 4 (développement par rapport à une colonne)
De $(*)$, on déduit que $\forall j_0 \in [\![1,n]\!]$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A})$
$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} m_{i,j_0} \det(M_{i,j_0})$$
où M_{i,j_0} est la matrice M privée de sa i^e ligne et $j_0{}^e$ colonne.

Déf. 3 on appelle cofacteur d'indice ij la valeur $\mathrm{cof}_{i,j}(M) := (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ et comatrice de M :
$$\mathrm{com}(M) = (\mathrm{cof}_{i,j}(M))_{ij}$$

Prop 5 : ${}^t\mathrm{com}(M)\, M = \det(M) I_n$.

Cor 1 : $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) / \det M$ est un inversible de $\mathcal{A}\} = GL_n(\mathcal{A})$

Déf 4 : $SL_n(\mathcal{A}) := \{M \in \mathcal{M}_n(\mathcal{A}) / \det M = 1\}$ est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathcal{A})$.

Prop 6 : lorsque $\mathcal{A}$ est intègre :
$(x_1, \ldots x_n)$ est liée $\iff \det(x_1, \ldots x_n) = 0$

<u>Contre-exemple</u> : si $\mathcal{A}$ n'est pas intègre, $\exists \lambda, \mu \neq 0 / \lambda\mu = 0$.
Alors $\det\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \lambda \neq 0$ Mais $(\lambda e_1, e_2 \ldots e_n)$ est liée.

Calcul en pratique du déterminant.

1] <u>Algorithme naïf</u> : utiliser $(*)$. Complexité : $\Theta((n+1)!)$

2] <u>Développement par rapport à une colonne</u>
Même complexité.

Déf 5 : Soient $a_1, \ldots a_n \in \mathcal{A}$. On appelle déterminant de Vandermonde la valeur :
$$V(a_1 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ | & | & & | \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Prop 7 : $V(a_1, \ldots a_n) = \prod_{i<j} (a_j - a_i)$

<u>Application</u> : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $(\mathrm{Tr}(A^k) = 0 \ \forall k) \Rightarrow A$ est nilpotente.

3) Méthode du pivot de Gauss : soit K un corps.
En appliquant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes, le calcul du déterminant de M se ramène en $\mathcal{O}(n^3)$ opérations à celui d'une matrice triangulaire supérieure. Or $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$,

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{d'après } (*).$$

Ex : $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 8 & 13 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

4) Résultats classiques

A) Déterminant de Cauchy : soient $(a_i), (b_j) \in K^n / \forall i,j$ $a_i + b_j \neq 0$. Alors
$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{i,j} \right) = \frac{\prod_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

Gou Al p779

B) Matrice compagnon : soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, alors
$$\det \begin{pmatrix} -X & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & -a_{n-2} \\ & & 1 & -X - a_{n-1} \end{pmatrix} = (-1)^n \left(X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \right)$$

II. Le déterminant en algèbre

1) Réduction : soit E un K-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$

Déf 1 (Polynôme caractéristique)
$\chi_u(X) := \det(u - X\,id) \in K[X]$ est de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

Ex : si p est un projecteur de rang r,
$$\chi_p(X) = (-1)^n (X-1)^r X^{n-r}$$

Prop 1 (Thm de Cayley-Hamilton).
$\chi_u(u) = 0$

Cor : $\lambda \in Sp(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0$

2) Algèbre bilinéaire

Déf. 2 (Déterminant de Gram). Soit E un espace préhilbertien, $x_1, \dots, x_n \in E$. On note
$$G(x_1, \dots, x_n) = \det\left((\langle x_i, x_j \rangle)_{i,j} \right)$$

Gou Al p763

Prop 2 : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V, sous-ev de E, et $x \in E$, alors $d := dist(x, V)$ vérifie
$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$
Rmq : $G(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff (x_1, \dots, x_n)$ est liée

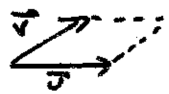
Appl. (Thm. Müntz). Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \dots \in \mathbb{R}^{+*}$, $(\alpha_n) \nearrow$
Alors $\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_2)$ ssi $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ diverge $\boxed{\text{DEV}}$

Gou An p734

Thm (inégalité d'Hadamard).
Si $x_1, \dots, x_n \in E$, avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ on obtient
$$|\det(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \times \dots \times \|x_n\|$$

3) En géométrie

Volume : le déterminant d'une base correspond au volume du parallélépipède qu'elle engendre

ex  $\vec{u} = \binom{a}{b}$ $\vec{v} = \binom{c}{d}$ Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$

Gri ...

Déf. 3 : soit B une base de K^n, elle est dite orientée positivement si $B(v_1, \dots, v_n)$ avec $\det(v_1, \dots, v_n) > 0$, négativement le cas échéant

Déf 4 (Produit vectoriel) Soient $x, y \in \mathbb{R}^3$. Alors la forme linéaire $f_{x,y} : z \mapsto \det(x,y,z)$ est représentée de manière unique par un vecteur :

$$x \wedge y$$

Déf 5 (Déterminant de Cayley-Menger) soit E un espace affine euclidien de dimension n, $x_0, \dots, x_n \in E$, on définit

$$\Gamma(x_0, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 \cdots & d_{0n}^2 \\ \vdots & d_{10}^2 & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n0}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } d_{ij} = d(x_i, x_j)$$

Prop 3 : $x_0, \dots, x_n$ sont contenus dans un hyperplan affine $\Longleftrightarrow \Gamma(x_0, \dots, x_n) = 0$ $\boxed{\text{DEV}}$

4] (Résultant de deux polynômes)

Déf 6 soient $P, Q \in K[X]$ de degré n et m, et

$$\varphi : \begin{cases} K_{m-1}[X] \times K_{n-1}[X] \to K_{n+m-1}[X] \\ (U,V) \mapsto UP + VQ \end{cases}$$

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det(\varphi)$$

Prop 4 : $P \wedge Q = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$

Appl : $\mathrm{Res}(P,P') = 0 \Longleftrightarrow P$ admet une racine double

5] Extensions de corps

Soit K/k une extension séparable de degré n. K admet une base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour $x \in K$, on pose $M_x : \begin{cases} K \to K \\ y \mapsto xy \end{cases}$ et on définit $N(x) = \det(M_x)$.

Prop 5 : $\forall x, y \in K$, $N(xy) = N(x)N(y)$

Ex : $d \in \mathbb{N}^*$ sans facteurs carrés, $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ admet $(1, \sqrt{d})$ pour base. Si $x = a + b\sqrt{d}$, $M_x = \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix}$ donc

$N(x) = a^2 - bd^2$.

III. En analyse

Gou Analyse p334

1] Calcul différentiel : $\det : M_n(K) \to K \in \mathcal{C}^\infty(K)$ $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ car polynomial en ses coefficients.

Et $\forall A \in M_n(K)$, $d_{\det} A = M \mapsto \langle \mathrm{com} A, M \rangle$

2] Intégration : soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

Déf 1 (Jacobien) $a \in \mathbb{R}^n$, $J_a(\varphi) = \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \right)$ et

$$j_a(\varphi) = \det(J_a(\varphi))$$

Prop 1 (changement de variables) si $\varphi : U \to V$ / $\varphi(U) = V$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme alors

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\varphi(x)) \, |j_x(\varphi)| \, dx$$

Appl : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

3] Topologie :
- $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$
- $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe
- $GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$ sont les composantes connexes de $GL_n(\mathbb{R})$

4] Équations différentielles : soit (E) l'équation différentielle DEM p197

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y : I \to \mathbb{R}^m$$

Soient $Y_1, \dots, Y_m$ des solutions de (E)

Déf 2 (Wronskien) on définit

$$W(t) = \det(Y_1(t), \dots, Y_n(t))$$

Prop 2 : $W(t)$ satisfait l'équation différentielle

$$W'(t) = \mathrm{Tr}(A(t))\, W(t)$$

Donc $W(t) = W(t_0) \times \exp\left(\int_{t_0}^t \mathrm{Tr}(A(u))\,du\right)$