152 Déterminant, Exemples et applications

Soient $\mathbb{K}$ un corps, et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

I Généralités

A Formes p-linéaires ($p \in \mathbb{N}^*$)

Définition 1 : Une application $f : E^p \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite

- p-linéaire si elle est linéaire en chacune de ses variables
- alternée si $\forall i,j, \begin{cases} i \neq j \\ v_i = v_j \end{cases} \Rightarrow f(v_1, \dots, v_p) = 0$

Théorème 2 : Soit f une forme p-linéaire alternée, soit $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ et $(v_1, \dots, v_p) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ avec $v_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} e_j \quad \forall i \; 1 \leq i \leq n$, alors

[Formule de Leibniz]
$$f(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \cdots x_{\sigma(n)n} f(e_1, \dots, e_n)$$

- Si $p = n$, les formes n-linéaires alternées forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

B Définition des déterminants ($p = n$)

Définition 3 : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on appelle $\det_B : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ l'unique forme n-linéaire alternée telle que $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$

Lemme 4 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base, on a, $\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n$, $\det_B(\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n)) = \det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \det_B(v_1, \dots, v_n)$

Proposition-définition 5 : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$, la valeur de $\det_B(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ ne dépends pas du choix de B, on définit donc

$$\det : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ \varphi \longmapsto \det \varphi \end{array}$$

on a, de plus, $\forall B$ base de E $\boxed{\det \varphi = \det_B(\mathrm{Mat}_B\, \varphi)}$

où $\det : \begin{array}{l} M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \\ A \longmapsto \det(A_1, \dots, A_n) \end{array}$, où A_i est la $i$ème colonne de A

C Propriétés élémentaires (point de vue matriciel)

Proposition 6 : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, on a

- $\det AB = \det BA$
- $\det {}^t A = \det A$
- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow (A_1, \dots, A_n)$ est une famille libre

Définition 7 : Soit $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, $I \subset [\![1,p]\!]$, $J \subset [\![1,q]\!]$, $|I| = |J| = r$

$\Delta_{IJ}(A) = \det\left((a_{ij})_{i \in I, j \in J}\right)$ est un mineur de A d'ordre r

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $\Delta_{ij} = \Delta_{[\![1,n]\!] \setminus \{i\}, [\![1,n]\!] \setminus \{j\}}$

Définition-proposition 8. On appelle comatrice la matrice des cofacteurs : $\mathrm{Com}\, A = \left((-1)^{i+j} \Delta_{ij}(A)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Exemple 9 : Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,

$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ et $\mathrm{Com}\, A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$

D Méthodes de calcul

Proposition 10 i) Formule de Leibniz $\rightarrow$ complexité : $O(n \times n!)$

ii) Développement en ligne (ou en colonne)

$\forall A$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$ $\Rightarrow$ complexité : $O(n!)$

Exemple 11 (Vandermonde) Soit $n \geq 2$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Proposition 11 • Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} A' & B \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{K})$, où A' et A'' sont carrées.

On a : $\det A = \det A' \det A''$

(Se généralise pour un nombre quelconque de blocs, pour les matrices triangulaires par blocs)

Applications 12 • Si A est triangulaire, $\det A$ est le produit des éléments diagonaux de A

→ Calcul de $\det A$ en $O(n^3)$

→ Si K est algébriquement clos, $\det A$ est le produit des valeurs propres de A dans K

II Propriétés du déterminant, applications

A Caractérisation du rang

Lemme 13: Soit $A \in M_{p,q}(K)$. A est de rang $r \in \mathbb{N}$ ssi A possède un mineur d'ordre r non nul, et tous ses mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls

1) Résolution de systèmes d'équations linéaires

Problème 14: On cherche à résoudre l'équation suivante :

$(*)\ AX = B$, de paramètres $\begin{cases} A \in M_{p,n}(K) \\ B \in M_{p,1}(K) \end{cases}$

et d'inconnue $X \in M_{n,1}(K)$

Théorème 15: Si $A \in GL_n(K)$, $(*)$ est un système de Cramer, Il possède une unique solution $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} = A^{-1}B$, caractérisée par

$$x_i = \frac{1}{\det A}\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n) \quad \text{(Formules de Cramer)}$$

Théorème 16 (Rouché-Fontené) Soit r le rang de A

Si $B \in \mathrm{Vect}(A_1, \dots, A_n)$, alors les solutions du système forment un espace affine de dimension $n-r$.

Sinon, le système n'admet pas de solution.

2) Diverses autres applications

Application 17 Trois points du plan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ sont alignés ssi

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Application 18 (Wronskien) Soient $I \subset \mathbb{R}$, $A : I \to M_n(K)$ continue, (H) : $Y' = AY$ une équation différentielle homogène, $V_1, \dots, V_n$ des solutions de (H)

On appelle Wronskien $\begin{array}{l} I \longrightarrow K \\ t \longmapsto \det(V_1(t), \dots, V_n(t)) \end{array}$

Propriété : $(V_1, \dots, V_n)$ est une base des solutions de (H) ssi $\exists t_0 \in I$ tq $\mathrm{Wronskien}(V_1, \dots, V_n)(t_0) \neq 0$

Application 19 (Problème des diamants) **DEV**

Un joaillier possède 2015 diamants. Si en choisissant un diamant quelconque, il peut séparer les 2014 restants en deux tas de 1007 diamants, de poids égaux, alors tous les diamants ont même poids.

Application 20 (Résultant de deux polynômes)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_n = \{P \in K[X],\ \deg P = n\}$, et, pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$R_{p,q} : \begin{array}{l} \Gamma_p \times \Gamma_q \longrightarrow K \\ (P, Q) \longmapsto \det(P, XP, \dots, X^{q-1}P, Q, \dots, X^{p-1}Q) \end{array}$$

est continue et telle que $\forall (P,Q) \in \Gamma_p \times \Gamma_q$, $P \wedge Q = 1$ ssi $R_{p,q}(P,Q) \neq 0$

B Application continue ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Lemme 21: $\det : M_n(K) \to K$ et $\Delta_{IJ} : M_n(K) \to K$, $|I| = |J|$, $I, J \subset [\![1, n]\!]$ sont continues (et même C^∞), et l'on a

$$D\det(A) : M \longmapsto \langle \mathrm{com}\, A, M \rangle$$

Proposition 22: • $GL_n(K)$ est un ouvert

Si $O_r \subset M_n(K)$ l'ensemble des matrices de rang r, on a

• $\forall r,\ 1 \leq r \leq n,\ \overline{O_r} = \bigcup_{0 \leq k \leq r} O_k$

En particulier, $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$

Proposition 23: • $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes

• $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs

C Morphisme de groupes

Théorème 24 : $\det : (GL(E), \circ) \longrightarrow (K^*, \times)$ est un morphisme de groupes

Proposition 25 : Pour tout $\varphi : GL(E) \longrightarrow G$ morphisme de groupes où $G \neq \mathbb{F}_2$ est commutatif, G se factorise de manière unique par le déterminant

Théorème 26 (Frobenius-Zolotarev) Soit V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie.

$\forall u \in GL(V), \qquad \varepsilon(u) = \left(\dfrac{\det u}{p}\right)$ ← Legendre

DEV

Application 27 : On définit une relation d'équivalence sur les bases de $\mathbb{R}^n$ par $B \sim B'$ ssi $\det_B B' > 0$.

On obtient alors deux classes d'équivalence, qu'on pourra, par un choix arbitraire, appeler l'une D^+ (bases directes) et l'autre D^- (bases indirectes).

D Application n-linéaire alternée

Proposition 28 Soient $(v_1, \dots, v_n)$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $Vol(v_1, \dots, v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $(v_1, \dots, v_n)$ $\left\{ z \in \mathbb{R}^n,\ z = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n,\ 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 1 \right\}$.

On a : $Vol(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$

Application 29 : Changement de variable dans une intégrale

Soient $\Delta, D \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts, $\varphi : \Delta \to D$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, J_φ sa matrice jacobienne. On a :

- $\lambda_D = \varphi(|J_\varphi| \lambda_\Delta)$ (mesure image)
- $\forall f : D \to \mathbb{R}_+$ borélienne, $\int_D f(x)\,dx = \int_\Delta f(\varphi(u))|J_\varphi|(u)\,du \leq +\infty$
- $\forall f : D \to \mathbb{R}_+$ borélienne, f est λ_D intégrable sur D ssi $(f \circ \varphi)|J_\varphi|$ est λ_Δ intégrable sur Δ

III Déterminant sur un anneau

Proposition 30 : Soit R un anneau commutatif. On peut définir le déterminant sur le R-module R^n de la même façon que pour les espaces vectoriels. On remarquera aussi le cas des anneaux intègres, pour lesquels la définition peut se faire en passant par le corps des fractions

A Déterminant sur l'anneau des polynômes

Application 31 Soit $A \in M_n(K)$, on appelle polynôme caractéristique de A $\chi_A = \det(A - XI_n)$

Théorème 32 (Cayley-Hamilton) $\chi_A(A) = 0$

Application 33 Calcul du déterminant de Vandermonde

B Cas général : R un anneau commutatif

Théorème 35 Soit $M \in M_n(R)$, et $f : R^n \to R^n$ l'endomorphisme associé.

On a :
- f surjectif ssi f bijectif ssi $\det(f) \in R^\times$
- f injectif ssi $\det f$ n'est pas diviseur de 0

Si de plus f est injectif :
- Si $A = \mathbb{Z}$, coker f est fini de cardinal $|\det f|$
- Si $A = K[X]$, coker f est un K-ev de dimension finie $\deg(\det f)$

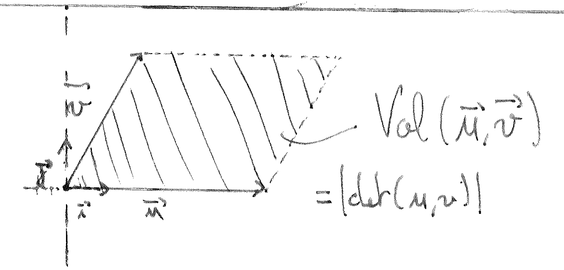

Figure 1 : aire d'un parallélépipède en dimension 2

Références

- Gourdon, Algèbre (Général)
- Roudier, Algèbre linéaire (Définition, propriétés du det)
- Grifone, Algèbre linéaire (Résolution de systèmes linéaires)

- Caldero, Germoni, H_2G_2 (adhérence des matrices de rang r)
- Objectif agreg : (Th de Frobenius-Zolotarev)
- Leichtnam, Schauer, Exo corrigés X-Ens, Algèbre - Géométrie (Th pour le det sur un module)

DVP 1

Problème. Un joaillier possède 2015 diamants,

Si en choisissant un diamant quelconque il peut séparer les 2014 restants en deux tas de 1007 diamants de poids égaux ;

Alors tous les diamants ont le même poids.

Preuve Posons $n = 1007$.

Notons $x_1 \dots x_{2n+1}$ les poids des diamants. $\boxed{x_k > 0 \ \forall k}$

D'après l'hypothèse : $\forall i \in [\![1, 2n+1]\!]$, $\exists J$ tq $\displaystyle\sum_{j \in J} x_j = \sum_{\substack{j \in [\![1,2n+1]\!] \\ j \notin J \\ j \neq i}} x_j$

$x_1, \dots, x_{2n+1}$ vérifient donc le système

$$\begin{cases} 0 \pm x_2 \dots \pm x_{2n+1} = 0 \\ \pm x_1 \ 0 \pm x_3 \dots \pm x_{2n+1} = 0 \\ \pm x_1 \pm x_2 \ 0 \dots \pm x_{2n+1} = 0 \\ \vdots \\ \pm x_1 \dots \pm x_{2n} + 0 = 0 \end{cases}$$

avec autant de + et de − sur chaque ligne.

La matrice de ce système linéaire est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \dots & \pm 1 \\ \vdots & & & & \\ & & & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \dots & & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$

Pour montrer que les diamants ont le même poids il suffit de montrer que l'ensemble des solutions du système est $\left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

C'est à dire que $\ker A = \mathrm{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \subset \ker A$ car autant de + que de − sur chaque ligne.
- montrons que $\dim \ker A = 1$.

  Formule du rang : $2n+1 = rg(A) + \dim(\ker A)$
- montrons que $rg\, A = 2n$

  caractérisation du rang : i) $\exists$ mineur d'ordre $2n \neq 0$.

  ii). $\det A = 0$.

ii) $\det A = 0$ car $\ker A \neq \{0\}$.

i) Notons D_{2n} le co-facteur supérieur gauche de taille $2n$ de A modulo 2.

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Puisque $\forall B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z})$ $\det(B \bmod 2) = \det(B) \bmod 2$, il suffit de montrer que $D_{2n} = 1$.

En rajoutant la deuxième colonne à la première :

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Puis en développant par rapport à la première colonne.

$$D_{2n} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{D_{2n-1}} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\delta_{2n-1}}$$

$$\delta_{2n-1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \delta_{2n-2}.$$

par récurrence $\delta_{2n-1} = \delta_{2n-2} = \dots = \delta_1 = 1$

donc $D_{2n} = D_{2n-1} + 1$.

par récurrence : $D_{2n} = D_1 + 2n - 1 = 2n - 1 = 1$

Dev 2

Théorème de Frobenius-Zolotarev.

Thm : Soit $p \geq 3$ premier et V un $\mathbb{F}_p$-ev. de dimension finie.
Tout $v \in GL(V)$ est une permutation de V et :

$$\varepsilon(v) = \left(\frac{\det(v)}{p}\right) \quad \text{où } \left(\frac{\cdot}{p}\right) \text{ est le symbole de Legendre}$$

Démo :

Lemme 1 : Tout morphisme de $GL(V) \to \{-1,1\}$ se factorise de manière unique par le déterminant.

Preuve 1 : Soit Φ un morphisme de $GL(V)$ dans $\{-1,1\}$.
$p \geq 3$ donc le groupe dérivé de $GL(V)$ est $SL(V)$ [Admis].

$D(GL(V)) = SL(V) \subset \ker \Phi$, en effet, soit $v \in SL(V)$.
$v = v_1 \dots v_n$ où v_i est un commutateur ie de la forme $f_i g_i f_i^{-1} g_i^{-1}$

et $\forall i$ $\Phi(v_i) = \Phi(f_i)\Phi(g_i)\Phi(f_i)^{-1}\Phi(g_i)^{-1}$

$\Phi(v_i) = 1$ car le groupe $\{-1,1\}$ est commutatif.

donc Φ se factorise par $GL(V)/SL(V)$: $\Phi = \tilde{\Phi} \circ \pi$ où π est la surjection canonique de $GL(V)$ dans $GL(V)/SL(V)$.

De même $\det = \widetilde{\det} \circ \pi$

$\widetilde{\det}$ étant un isomorphisme. ($\ker \det = SL(V)$)

$$\Phi = \tilde{\Phi} \circ (\widetilde{\det})^{-1} \circ \det$$

Donc $\Phi = g \circ \det$ avec $g = \tilde{\Phi} \circ (\widetilde{\det})^{-1}$

g est unique car $\det$ est surjectif.

Lemme 2 : Soit $p \geq 3$ premier. Le symbole de Legendre est le seul morphisme non trivial de $\mathbb{F}_p^*$ dans $\{-1,1\}$.

Preuve 2 : $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est non trivial car il existe des éléments de $\mathbb{F}_p^*$ qui ne sont pas des carrés,

$\mathbb{F}_q^*$ est cyclique, notons α un générateur. Soit σ un morphisme, il est entièrement défini par $\sigma(\alpha)$

si $\sigma(\alpha) = 1$, le morphisme est trivial.

si $\sigma(\alpha) = -1$, $\sigma(x) = 1$ ssi x est une puissance paire de α, qui sont exactement les carrés de $\mathbb{F}_p^*$

Il suffit maintenant de montrer que g est non-trivial.

Si g est trivial, $\forall u \in GL(V)$, $\varepsilon(u) = g(\det(u)) = 1$

Cherchons u tq $\varepsilon(u) \neq 1$.

Notons d la dimension de V, en tant que $\mathbb{F}_p$-ev.

V est isomorphe à $\mathbb{F}_q$ en tant que $\mathbb{F}_p$ espace-vectoriels $(q = p^d)$

On s'intéresse donc à $GL(\mathbb{F}_q)$.

Soit β un générateur de $\mathbb{F}_q^*$. La multiplication par β est une bijection $\mathbb{F}_p$-linéaire, elle est égale au cycle $(\beta, \beta^2, \dots, \beta^{q-1})$ qui est de taille $q-1$, et donc de signature $(-1)^q = -1$ car q impair

g est donc le symbole de Legendre

$$\forall u \in GL(V), \ \varepsilon(u) = \left(\frac{\det(u)}{p}\right).$$