152

Déterminant, Exemples et Applications

Cadre : $\mathbb{K}$ un corps E un $\mathbb{K}$ev de dimension n $(n \in \mathbb{N}^*)$

(I) Le déterminant [GOU]

(1) Définitions et premières propriétés

Def 1 : Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ une base de E. Si $x_1 \dots x_n \in E$ avec $x_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} e_j$ alors le déterminant de $(x_1 \dots x_n)$ est le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i),i}$

Thm 2 : $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée et $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ est une droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$

Coro 3 : (Chg^t de base) Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ 2 bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \cdot \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$

Coro 4 : $\mathcal{B}' = (e_1' \dots e_n')$ une famille de vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base. Alors $\mathcal{B}'$ est une base de $E \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' \neq 0$.

Déf 5 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(e_1) \dots f(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie. On l'appelle déterminant de f, noté $\det f$

Prop 6 : Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$

(i) $\det f \circ g = \det f \cdot \det g$

(ii) $\det Id = 1$

(iii) $f \in GL(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$ et $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$.

Def 7 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A, noté $\det A$ le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notations 8 : $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{vmatrix}$

Prop 9 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

i. $\det AB = \det A \cdot \det B$.

ii. $\det {}^tA = \det A$.

iii. $\det \lambda A = \lambda^n \det A$.

Application 10 :
$Rg({}^tA) = Rg(A)$

(2) Calcul de déterminants

a) **Méthode formule de Leibniz** : complexité $= O(n \times n!)$

b) **Méthode de développement en ligne / colonne** : complexité $O(n!)$

Def 11 : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle mineur de a_{ij} le déterminant $\Delta_{ij} = \det(a_{kl})_{\substack{1 \leq k,l \leq n \\ k \neq i,\ l \neq j}}$ et cofacteur de a_{ij} le scalaire $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

Prop 12 : Le développement selon une colonne : $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

Exemple 13 : déterminant de Vandermonde.
$a_1 \dots a_n \in \mathbb{K}$ $V(a_1 \dots a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ | & | & | & & | \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Exemple 14 : déterminant de Cauchy
$a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n \in \mathbb{K}$ $\forall i \neq j$ $a_i + b_j \neq 0$

$$C(a_1 \dots a_n, b_1 \dots b_n) = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)}$$

Prop 14.1 : ${}^t com A \cdot A = A \, {}^t com A = (\det A) I$ où $com A = (A_{ij})$ (comatrice)

c) **Méthode d'élimination de Gauss** : complexité $O(n^3)$
Par opérations élémentaires sur les lignes et colonnes le calcul du déterminant se ramène à celui d'une matrice triangulaire.

Prop 15 : Si $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ alors $\det M = \det A \cdot \det B$

Appli 16 : Si A est triangulaire, $\det A$ est le produit de ses éléments diagonaux

(II) Le déterminant en algèbre

(1) Résolution de système d'équations linéaires [GOU]

Def 17 : Le système (S) $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de Cramer si $\det A \neq 0$

Prop 18 : Un système de Cramer (S) admet une unique solution $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$
$\forall i \in [\![1; n]\!]$ $x_i = \frac{1}{\det A} \det(A_1 \dots A_{i-1}, B, A_{i+1} \dots A_n)$ où A_i désignent les vecteurs colonnes de A.

ex (S) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2y+z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ det A = 1. on obtient $(x,y,z)=(-1,0;2)$

② Détermination du rang d'une matrice

,RI) **Thm 19** : $A\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ $Rg(A)=r \Leftrightarrow \begin{cases}\text{il existe un mineur d'ordre } r \neq 0 \\ \text{tous les mineurs d'ordre } s>r \\ \text{sont nuls}\end{cases}$

Exemple 20
$A=\begin{pmatrix}a&2&-1&b\\3&0&-1&-4\\5&4&-1&2\end{pmatrix}$ $Rg A\geq 2$
$Rg A=2$ si $a=1$ et $b=3$

Applications 21 (Wronskien)
[GOU2] Soit $A: I\subset\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue. (H): $Y'=A(t)Y$ équation diff homogène. $V_1\dots V_n$ n solutions de (H). On appelle wronskien de $V_1\dots V_n$ l'application $I\to\mathbb{K}$
$t\mapsto\det(V_1(t)\dots V_n(t))$
Propriété : $V_1\dots V_n$ de (H) forment une base de solution de (H) ssi $\exists t_0\in I$ tq wronskien $(V_1\dots V_n)(t_0)\neq 0$

③ Utilisation du polynôme caractéristique [GOU]

Def 22 : Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par $\chi_A(X)=\det(A-XI_n)$
Prop 23 : $\chi_{{}^tA}=\chi_A$, $\chi_{BA}=\chi_{AB}$, $\chi_{P^{-1}AP}=\chi_A$ où $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P\in GL_n(\mathbb{K})$
Thm 24 : (valeurs propres)
λ est v.p de $f\in L(E)$ ssi $\chi_f(\lambda)=0$
Thm 25 : $f\in L(E)$.
i) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ $\Leftrightarrow$ f est trigonalisable
ii) si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples, f est diagonalisable
iii) Si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et si la multiplicité de toute racine λ_i, $N_i=\dim(\ker(f-\lambda_i Id))$ alors f est diagonalisable
Exemple 26. Si $P=X^m+a_mX^{m-1}+\dots+a_0$ est scindé à racines simples alors $A=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&-a_0\\1&\ddots&&\vdots\\&\ddots&0&\vdots\\(0)&&1&-a_{n-1}\end{pmatrix}$ est diagonalisable
Appli 27 : Cayley-Hamilton. Soit $f\in L(E)$ alors $\chi_f(f)=0$

④ En algèbre bilinéaire [FGN2]

a) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$
Prop 28 (Caractérisation des matrices sym. déf pos)
$M=(m_{ij})\in S_n(\mathbb{R})$ $M\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ssi tous les mineurs principaux $D_k=\det(m_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ sont >0

Lemme 29 $A,B\in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ tq $\alpha+\beta=1$
alors $\det(\alpha A+\beta B)\geq(\det A)^\alpha(\det B)^\beta$
App 30 : Ellipsoïde de John Loewner
Soit K compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$.
Il existe une unique ellipsoïde centrée en 0 de volume minimal contenant K
App 31 : Les ssg compacts de GL(E) maximaux pour l'inclusion sont exactement les gpes orthogonaux O(q) où $q\in Q^{++}$

b) $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$ (car $\mathbb{K}\neq 2$) [H2G2]

Def 32 (Discriminant). Le discriminant d'une f.q. non dégénérée q sur E (dim finie) est la classe dans $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$ du déterminant de n'importe quelle matrice de q.
Thm 33 : 2 matrices inversibles $A,A'\in S_n(\mathbb{F}_q)$ sont dans la même orbite de congruence ssi elles ont même discriminant
• Dans une base adaptée, une f.q. non dégénérée sur E a une matrice de la forme $\begin{pmatrix}1&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&1\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&\alpha\end{pmatrix}$ où $\alpha\in\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_q^2$
Appli 34. Loi de réciprocité quadratique
Soient p, q 2 nombres premiers impairs ≠, alors $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$

⑤ Résultants [SZP]

Soit $P=\sum^{p} a_iX^i$ $Q=\sum^{q} b_iX^i$ avec $a_p\neq 0$ $b_q\neq 0$ $P,Q\in K[X]$
Def 35 : Le résultant de P et Q est le déterminant de la matrice de Sylvester associée : $Res(P,Q)=\begin{vmatrix}a_p&&0&b_q&&(0)\\\vdots&\ddots&&\vdots&\ddots&\\a_0&&a_p&b_0&&b_q\\&\ddots&\vdots&&\ddots&\vdots\\(0)&&a_0&(0)&&b_0\end{vmatrix}$ $\underbrace{\quad}_{q}$ $\underbrace{\quad}_{p}$
Prop 36 : Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. On a
(i) $Res(\lambda P,Q)=\lambda^q Res(P,Q)$
(ii) $Res(P,Q)=(-1)^{pq}Res(Q,P)$
Prop 37 : (lien avec les racines)
Soient α_i les racines de P ds $\bar{K}$ et β_j celles de Q $P(X)=a_p\prod_1^p(X-\alpha_i)$ $Q(X)=b_q\prod_1^q(X-\beta_i)$ alors $Res(P,Q)=a_p^q\prod_1^p Q(\alpha_i)=a_p^q b_q^p\prod_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}(\alpha_i-\beta_j)$
App 38 : (Thm de Kronecker)
Soit $P\in\mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré n ie $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0$ et tq $P(\lambda)=0\Rightarrow|\lambda|=1$ et $a_0\neq 0$
Alors les racines de P sont des racines de l'unité
Rmq 39 : application : loi de réciprocité quadratique

III) Interprétation géométrique du déterminant

1) Volume dans $\mathbb{R}^m$

[GRI] **Def 40** : Soit $B=(e_1 -- e_n)$ une base de $\mathbb{R}^m$ $V_1 -- V_n$ n vecteurs la mesure du volume du parallélipipède $(V_1 -- V_n)$ est donné par $|\det_B(V_1 -- V_n)|$

Ex 41 : L'aire du triangle (ABC) est $\frac{1}{2}\det(AB, AC)$

Thm 42 : (Inégalité d'Hadamard.)
[GOU] Les vecteurs colonnes $X_1 .. X_n$ d'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $|\det M| \leq \|X_1\| \cdots \|X_n\|$ où $\|.\|$ est la norme euclidienne

[COH] **Appli 43** : Méthode de calcul de $\det M$ modulo $(\prod_k p_k)$ où p_k nb premiers tel que $(\prod_k p_k) \geq 2\prod_{i=1}^{n}\|X_i\|$ $M \in M_n(\mathbb{Z})$

Prop 44 : Soient $M_1 M_2 M_3 M_4$ 4 points de $\mathbb{R}^3$
Ces points sont coplanaires $\Longleftrightarrow \det(M_1M_2, M_1M_2, M_1M_4) = 0$

Ex 45 : Th de Menelaus
[FGN3] ABC triangle non aplati, M, N, P 3 points de $(AB), (AC), (BC)$ distincts de ABC alors

$$M, N, P \text{ alignés} \Longleftrightarrow \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$$

Rmq 46 : Le théorème de changement de variable dans une intégrale repose sur une variation de volume infinitésimal, le Jacobien

2) Généralisation du volume

Def 47 : Soit E préhilbertien $x_1 - x_n$ vecteurs de E. On appelle
[GOU] déterminant de Gram $G(x_1 .. x_n) = \det \langle x_i, x_j \rangle$

Rmq 48 : Le déterminant de Gram représente le carré du volume du parallélotope $(x_1 - x_n)$

Prop 49 : Soit E préhilbertien. V sous espace de E muni d'une base $e_1 - e_n$. Soit $x \in E$. Alors la distance de x à V vérifie

$$d^2 = \frac{G(e_1 .. e_n, x)}{G(e_1 .. e_n)}$$

Rq 50 : $G(x_1 -- x_n) \Longleftrightarrow (x_1 -- x_n)$ liée

Appli 51 : Th de Müntz
[GOU2] Soit $\alpha_0 .. \alpha_n \in \mathbb{R}^*$ (α_n) strictement $\nearrow$. Alors Vect (x^{α_i}) est dense dans $\mathcal{C}([0;1], \| \|_2)$ ssi $\sum \frac{1}{\alpha_i}$ diverge.

3) Distance entre plusieurs points [ZAV]

Def 52 : Soit $\mathbb{R}^m$ muni de sa structure euclidienne. Soit $B=(e_1 -- e_n)$ base canonique de $\mathbb{R}^m$. Soit $x_0 -- x_n$ $n+1$ point de $\mathbb{R}^m$. On appelle déterminant de Cayley-Menger des (x_i)

$$\Gamma(x_0, .. x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{0i}^2 & & d_{0n}^2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & & 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$$

Rmq 53 : Ce déterminant est symétrique en les indices concernés

Prop 54 : i) Si $x_0 -- x_n$ sont les sommets d'un simplexe non dégénéré de $\mathbb{R}^m$ alors le rayon R de la sphère circonscrite à ce simplexe vérifie

$$R^2 = -\frac{\Delta(x_0 -- x_n)}{2\Gamma(x_0 -- x_n)} \quad \text{où } \Delta(x_0 .. x_n) = \begin{vmatrix} 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0n}^2 \\ d_{10}^2 & 0 & & d_{1n}^2 \\ & & \ddots & \\ d_{n0}^2 & d_{n1}^2 & & 0 \end{vmatrix}$$

ii) $n+2$ points $(x_0 -- x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^m$ sont cosphériques ou coplanaires ssi $\Delta(x_0 .. x_n) = 0$ DEV1

4) Géométrie différentielle [H2G2]

Prop 55 : $\det : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ est de classe C^∞
$\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ $D\det_A : H \mapsto Tr({}^t com(A) H)$ où $com A$ est la comatrice

Cor 56 : $\det : SL_n(\mathbb{C}) \longmapsto \mathbb{C}$ est une submersion donc $SL_n(\mathbb{C})$ est une sous variété

Prop 57 : $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe donc $SL_n(\mathbb{C})$ aussi

Appli 58 : isomorphisme exceptionnel : $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{C})$ DEV2

[GOU] X. Gourdon - Les maths en tête - Algèbre
[GRI] J. Grifone - Algèbre Linéaire
[GOU2] X. Gourdon - Les maths en tête . Analyse
[FGN3] S Francinou, H. Gianella, S. Nicolas - Oraux X-ENS - Exercices de mathématiques / Algèbre 3
[H2G2] P. Caldero, J. Germoni , Histoires hédonistes de groupes et de géométries I
[SZP] A. Szpirglas, Mathématiques L3 Algèbre
[ZAV] M. Zavidovique, Un max de maths.
[COH] H. Cohen , course in computational algebraic number theory

Dvpt: Déterminant de Cayley-Mengen et simplexes ds $\mathbb{R}^n$.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine euclidienne standard.

On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\langle , \rangle$ le p-s canonique

det la forme volume tq $\det(e_1,\dots,e_n)=1$.

Soient $x_0,\dots,x_n$ $n+1$ pts de $\mathbb{R}^n$, on note $d_{ij}=\|x_i-x_j\|$

On note
$$\Gamma(x_0,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n}^2 \\ 1 & d_{1,0}^2 & 0 & \cdots & d_{1,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

le déterminant de Cayley-Menger associé à $(x_0,\dots,x_n)$

On note
$$\Delta(x_0,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n}^2 \\ d_{1,0}^2 & 0 & \cdots & d_{1,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

prop: 1) Si $x_0,\dots,x_n$ sont les sommets d'un simplexe non dégénéré ds $\mathbb{R}^n$, Alors le rayon R de la sphère circonscrite à ce simplexe vérifie :
$$R^2 = -\frac{\Delta(x_0,\dots,x_n)}{2\,\Gamma(x_0,\dots,x_n)}$$

2) $n+2$ points $(x_0,\dots,x_{n+1})$ de $\mathbb{R}^n$ sont cosphériques ou ds le m̂ hyperplan ssi $\Delta(x_0,\dots,x_n)=0$

Démo :

1) Etape 1 :
$$\det(x_1-x_0,\dots,x_n-x_0)=\begin{vmatrix} x_1^1-x_0^1 & \cdots & x_1^n-x_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1-x_0^1 & \cdots & x_n^n-x_0^n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 \\ x_1^1-x_0^1 & \cdots & x_1^n-x_0^n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^1-x_0^1 & \cdots & x_n^n-x_0^n & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 & \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

d'où
$$\det(x_1-x_0,\dots,x_n-x_0)^2=-\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \langle x_0,x_0\rangle & \langle x_0,x_1\rangle & \cdots & \langle x_0,x_n\rangle & 1 \\ \langle x_1,x_0\rangle & \langle x_1,x_1\rangle & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \langle x_n,x_0\rangle & \langle x_1,x_n\rangle & \cdots & \langle x_n,x_n\rangle & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On réexprime les $\langle x_i,x_j\rangle$ par $\frac{1}{2}\left(\|x_i\|^2+\|x_j\|^2-d_{i,j}^2\right)$

puis faire les opérat° : $L_i \leftarrow L_i - \frac{1}{2}\|x_i\|^2 L_{n+2}$ $\forall i \leq n+1$

puis : $C_j \leftarrow C_j - \frac{1}{2}\|x_j\|^2 C_{n+2}$ $\forall j \leq n+1$

Et on obtient :

$$\det(\overrightarrow{x_0x_1},\dots,\overrightarrow{x_0x_n})^2 = -\begin{vmatrix} 0 & -\frac{d_{0,1}^2}{2} & \cdots & -\frac{d_{0,n}^2}{2} & 1 \\ -\frac{d_{1,0}^2}{2} & 0 & & -\frac{d_{1,n}^2}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -\frac{d_{n,0}^2}{2} & -\frac{d_{n,1}^2}{2} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\Gamma(x_0,\dots,x_n)$$

→ factoriser les n+1 premières colonnes par $-\frac{1}{2}$ puis par -2 pour la dernière ligne

<u>étape 2</u> :

Si $x_0,\dots,x_n$ sont des points de $\mathbb{R}^{n-1}$, alors en plongeant $\mathbb{R}^{n-1}$ ds $\mathbb{R}^n$, l'enveloppe convexe des n+1 pts devient de volume nul ds $\mathbb{R}^n$. Par l'étape 1, le dét de Cayley-Menger associé est donc nul.

Si maintenant $x_0,\dots,x_n$ sont des points de $\mathbb{R}^n$, le simplexe qu'ils engendrent est non dégénéré ssi son volume est non nul, ie si $\Gamma(x_0,\dots,x_n) \neq 0$ par étape 1.

<u>étape 3</u> : Introduisons y, le centre de la sphère circonscrite aux points $x_0,\dots,x_n$ et notons R le rayon de cette dernière. D'après la 2ème étape, on obtient $\Gamma(y, x_0,\dots,x_n) = 0$

Et donc :

$C_2 \leftarrow C_2 - R^2 C_1$

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & 0 & R^2 & \cdots & R^2 \\ \vdots & R^2 & 0 & d_{0,1}^2 \cdots & d_{0,n}^2 \\ \vdots & \vdots & d_{1,0}^2 & 0 & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 1 & R^2 & d_{n,0}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & & & 1 \\ 1 & -2R^2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n}^2 \\ \vdots & \vdots & d_{1,0}^2 & \ddots & & d_{1,n}^2 \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

dvpt 2nde ligne → $= -2R^2\,\Gamma(x_0,\dots,x_n) - \begin{vmatrix} 1 & 1 \cdots 1 \\ 0 & \\ \vdots & \Delta(x_0,\dots,x_n) \\ 0 & \end{vmatrix}$

Par l'étape 2, $\Gamma(x_0,\dots,x_n) \neq 0$

donc $\boxed{R^2 = -\frac{\Delta(x_0,\dots,x_n)}{2\Gamma(x_0,\dots,x_n)}}$

2)

$\boxed{\Rightarrow}$

- Si $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sont cosphériques

Notons y, le centre d'une sphère qui les porte et R son rayon.

alors $\forall i \leq n+1$, $\|x_i - y\|^2 = \|x_i\|^2 - 2\langle x_i, y\rangle + \|y\|^2 = R^2$.

- Si $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ sont ds le m̂ hyperplan alors il existe une famille $(b, c_1, \dots, c_n)$ de n+1 réels, non tous nuls tq : $\forall i \leq n+1,\ b + \sum_{j=1}^{n} c_j x_i^j = 0$

↑ coord ds le repère orthonorm. canonique

- Ainsi dans les 2 cas, on a montré l'existence d'une famille $(a, b, c_1, \dots, c_n)$ de n+2 réels non tous nuls tq :

$$\forall i \leq n+1,\quad a\|x_i\|^2 + b + \sum_{j=1}^{n} c_j x_i^j = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \|x_0\|^2 & 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_{n+1}\|^2 & 1 & x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$$

la matrice de gauche qu'on nomme A est donc non inversible car $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \neq 0$.

donc :

<u>big astuce</u>

$$0 = \begin{vmatrix} \|x_0\|^2 & 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_{n+1}\|^2 & 1 & x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \|x_0\|^2 & \cdots & \|x_{n+1}\|^2 \\ -2x_0^1 & \cdots & -2x_{n+1}^1 \\ \vdots & & \\ -2x_0^n & \cdots & -2x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$= \left| \|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle \right|_{0 \leq i,j \leq n} = \Delta(x_0, \dots, x_{n+1})$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\Delta(x_0, \dots, x_{n+1}) = 0$, on a $0 = \begin{vmatrix} \|x_0\|^2 & 1 & x_0^1 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|x_{n+1}\|^2 & 1 & x_{n+1}^1 & & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$

d'où l'existence d'un vecteur non nul ${}^t(a, b, c_1, \dots, c_n)$ tq :

$$A\,{}^t(a, b, c_1, \dots, c_n) = 0$$

$\Rightarrow$ les x_i sont ds le m̂ hyperplan ou cosphérique. (l'écrire)

<u>Rq</u>: Pour finir le dvpt en temps fini, il ne faut pas écrire ts les déterminants, qq fois, il suffit de rajouter un déterminant, des lignes, colonnes, intervertir des lignes..., Il suffit de prendre des craies de couleurs et se démerder pour que le jury comprenne.

Isomorphisme exceptionnel: $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$

Damien Le Gléau

4 janvier 2016

Leçons : 152,204,214,217
Référence : H_2G_2 (Tome 1, chap 9)
Selon la leçon ou les envies, on zappe certains trucs et on insiste sur d'autres.

Théorème 1. *Tout est dans le titre*

Definition 1. *On appelle groupe de Lie un groupe topologique muni d'une structure de sous-variété de $\mathbb{R}^N$ pour N entier convenable, telle que la multiplication et le passage à l'inverse soit de classe C^1.*

Notations : On notera par la lettre gothique $\mathfrak{g}$ correspondante l'espace tangent $T_e(G)$ à un groupe G en l'identité. (Vaut mieux pas parler d'algèbre de Lie (pas au prgm)).

Lemme 2.
Soit $n \in \mathbb{N}$, les groupes $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ sont des groupes de Lie.
Et on a : ★ $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
★ $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ Tr(M) = 0\}$
★ $\mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$

Rappel :
Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $X := f^{-1}(\{y\})$, où $y \in \mathbb{R}^m$.
Si f est une submersion en tout point de X, alors X est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n - m$.

Démonstration. (du lemme 2)
Le produit matriciel et le passage à l'inverse sont des applications polynomiales ou rationnelles donc de classe C^1.
Il reste à montrer que $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, $O_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{C})$ sont des sous variétés.

1) $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$ qui est une sous variété (on peut identifier $M_n(\mathbb{C})$ à $\mathbb{R}^{2n^2}$.

2) Soit $f = det : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ (est C^∞)
Soit$A = (A_1|...|A_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrons que l'on a : $df_A : \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ H \longmapsto Tr({}^tCom(A)H) \end{array}$

Soit $H = (H_1|...|H_n) = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
On note $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{C}^n$, et par n-linéarité du déterminant on a :

$$\begin{aligned} det(A+H) &= det_{\mathcal{B}}(A_1 + H_1, ..., A_n + H_n) \\ &= det_{\mathcal{B}}(A_1, \ \dots\ , A_n) + \sum_{i=1}^{n} det_{\mathcal{B}}(A_1, ..., A_{i-1}, H_i, A_{i+1}, ..., A_n) + o_{\ H \to 0}(H) \end{aligned}$$

On note $(m_{i,j})_{1 \leq i,j, \leq n} = \ {}^tCom(A)$

$$D'où \quad Ddet_A(H) \quad = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} h_{i,j}m_{j,i}\right) \qquad \text{(en développant selon la } i^{eme} \text{ colonne)}$$
$$= Tr(H\ {}^tCom(A)) = Tr(\ {}^tCom(A)\cdot H\ )$$

Lorsque $A \in SL_n(\mathbb{C})$, on a $Ddet_A(H) = Tr(A^{-1}H)$ pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
df_A est une forme linéaire non nulle donc surjective et donc f est une submersion en tout point de $SL_n(\mathbb{C})$ et donc $SL_n(\mathbb{C})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n^2}$ de dimension $2n^2-1$

Et on a $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = T_{I_n}(SL_n(\mathbb{C})) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid Tr(H) = 0\}$

---

3) Soit $g: \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow SL_n(\mathbb{C}) \\ M \longmapsto {}^tMM \end{array}$

On a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $dg_A: \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow S_n(\mathbb{C}) \\ H \longmapsto {}^tAH + {}^tHA \end{array}$

Soit $S \in S_n(\mathbb{C})$, et $A \in O_n(\mathbb{C})$ on a $dg_A\left(\frac{AS}{2}\right) = S$, donc dg_A est surjective pour $A \in O_n(\mathbb{C})$.
$O_n(\mathbb{C}) = g^{-1}(I_n)$ et g est une submersion en tout point de $O_n(\mathbb{C})$ et donc $O_n(\mathbb{C})$ est une sous variété de $\mathbb{R}^{2n^2}$ de dimension $2n^2 - \frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$.

---

4) $SO_n(\mathbb{C})$ est une composante connexe de $O_n(\mathbb{C})$ donc c'est aussi une sous-variétés et de même dimension.
Et $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) = A_n(\mathbb{C})$ □

Lemme 3.
★ *$SL_n(\mathbb{C})$ est connexe.*

Démonstration. (du lemme 3) (C'est plus rapide en utilisant les transvections, mais pour la leçon 152, il faut un peu de déterminant dans l'histoire)
D'abord, $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arc.
En effet, pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, $f: z \mapsto det(zA+(1-z)B)$ étant polynomiale, ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans $\mathbb{C}$ et donc, on peut trouver un chemin continu sur $[0,1]$, γ reliant $0 = \gamma(0)$ et $1 = \gamma(1)$ dans $\mathbb{C}$ en évitant les au plus n racines de f dans le plan complexe. D'où $g: t \mapsto \gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ est un chemin continu de $[0,1]$ dans $GL_n(\mathbb{C})$ (car $det(\gamma(t)A + (1-\gamma(t))B) \neq 0 \ \ \forall t \in [0,1]$) reliant $B = g(0)$ et $A = g(1)$. Donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

Puis $SL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ est homéomorphe à $GL_n(\mathbb{C})$ via l'homéomorphisme :

$$\varphi: \left| \begin{array}{l} SL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (A,\lambda) \mapsto A\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

φ est continue par continuité du produit matriciel.
φ est bijective :
- -surjectivité :OK
- -injectivité : Comme les homothéties commutent avec tout le monde, on a rapidement que φ est un morphisme de groupe et par un calcul matriciel par bloc et en se rappelant que les éléments de $SL_n(\mathbb{C})$ sont de déterminant 1, on a $ker(\varphi) = (I_n, 1)$.

Par le calcul, on obtient pour tout $B = (B_1 \mid \ldots \mid B_n) \in GL_n(\mathbb{C}), \varphi^{-1}(B) = \left((det(B).B_1 \mid B_2 \mid \ldots \mid B_n)\ ,\ \frac{1}{det(B)}\right)$

Par continuité du déterminant, φ^{-1} est continue.
Donc $SL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^*$ est connexe car homéomorphe au connexe $GL_n(\mathbb{C})$.
Donc $SL_n(\mathbb{C})$ est connexe.

□

Démonstration. (du théorème 1)

Le groupe $SL_2(\mathbb{C})$ agit sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ par conjugaison : $\begin{array}{rccl} \varphi : & SL_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Aut(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})) \\ & A & \longmapsto & (\varphi_A : X \mapsto AXA^{-1}) \end{array}$

C'est bien une action, car l'on a : $Tr(AXA^{-1}) = Tr(X) = 0$.
On a de plus $dim\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = 3$, car $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Puisque pour tout A, l'application φ_A est linéaire et bijective, on voit que $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est contenu dans le groupe linéaire de l'espace vectoriel $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, que l'on identifie à $GL_3(\mathbb{C})$.

Plus précisément, puisque $det(\varphi_A(X)) = det(X)$, on peut même dire que $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est un sous groupe de $O(det)$ (ici, en dimension 2, le déterminant est une forme quadratique).
Soit $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Alors, on peut l'écrire :

$$X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{C}$$

On calcule

$$det(X) = -a^2 - bc = -a^2 - \frac{1}{4}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2$$

Les formes obtenues sont linéairement indépendantes, et la forme quadratique est non dégénérée, et de rang (maximal) 3. (Rappel, sur $\mathbb{C}$ les formes quadratiques sont classées par le rang). Dans une base orthonormée de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ pour la forme quadratique det, le groupe orthogonal $O(det)$ s'identifie au groupe $O_3(\mathbb{C})$ des matrices orthogonales complexes. Si bien que l'on peut écrire $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \subset O_3(\mathbb{C})$. Puisque φ est continue et $SL_2(\mathbb{C})$ connexe, $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est aussi connexe dans $O_3(\mathbb{C})$ tout en contenant l'identité, et donc $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) \subset SO_3(\mathbb{C})$.

Montrons l'inclusion inverse; Composée de fractions rationnelles, φ est différentiable :

$$\begin{array}{rrcl} d\varphi_I : & \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) \\ & H & \longmapsto & (X \mapsto HX - XH) \end{array}$$

On a : $\mathfrak{so}_3(\mathbb{C}) = \mathfrak{o}_3(\mathbb{C}) = \mathcal{A}_3(\mathbb{C})$.
De plus, $d\varphi_I$ est injective, car l'on a :

$$\begin{aligned} Ker\ d\varphi_I &= \{H \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})\ :\ \forall\, X,\ HX - XH = 0\} \\ &= \{H\ :\ Tr(H) = 0,\ H = \lambda I_2 \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{C}\} = \{0\} \end{aligned}$$

Comme $dim\ \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = dim\ \mathfrak{so}_3(\mathbb{C})$, on conclut que $d\varphi_I$ est un isomorphisme. Ainsi, d'après le théorème d'inversion local, l'application φ est un homéomorphisme local et donc $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ contient un ouvert. Le sous-groupe $\varphi(SL_2(\mathbb{C}))$ est ouvert par principe de translation (voir H_2G_2 page 26), et donc fermé également(voir H_2G_2 page 33).

À la fois ouvert et fermé non vide dans $SO_3(\mathbb{C})$, qui est connexe, on a donc finalement : $\varphi(SL_2(\mathbb{C})) = SO_3(\mathbb{C})$. Puisque $Ker\ \varphi = \mathbb{K}^* I_2$, on peut conclure que $PSL_2(\mathbb{C}) \simeq SO_3(\mathbb{C})$.

□

Rmq :(Théorème d'inversion locale version sous-variétés)
Soient X et Y des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$, respectivement. Soit $f \in \mathcal{C}^1(X, Y)$ et $a \in X$.
Si $\mathrm{d}f_a$ est un isomorphisme de $T_a(X)$ sur $T_{f(a)}(Y)$, alors il existe un voisinage $V \subset X$ de a tel que la restriction de f à V soit un difféomorphisme de V vers un ouvert $W \subset Y$ de $f(a)$.

* $M \in M_n(\mathbb{Z})$, $M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \det M = \pm 1$

$\Leftarrow$ $\det M = \pm 1$ alors $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t\mathrm{Com}\, M = \pm {}^t\mathrm{Com}\, M \in M_n(\mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ $M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ $\det I = \det M \det M^{-1}$ $\det M$ inversible dans $\mathbb{Z}$
donc $\det M = \pm 1$

---

* Soit L un sous groupe abélien de $\mathbb{Z}^n$ tq $\mathbb{Z}^n / L$ soit fini.
Soit B base de L, b base canonique de $\mathbb{Z}^n$
Mq $\det M_b(B) = \# \left(\mathbb{Z}^n / L \right)$.

---

* Montrer l'inégalité d'Hadamard.

$|\det M| \leq \|X_1\| \dots \|X_n\|$ où X_i sont les colonnes de M.

Si M non inversible $\det M = 0$ ok.
sinon $M = QR$ $Q \in O_n(\mathbb{R})$ R triangulaire sup.
$\det M = \det Q \det R$
$|\det M| = |\det R| = |R_{11} \times R_{22} \times \dots \times R_{nn}|$.
$X_i = Y_i + \sum \lambda_j Y_j$
$\|X_i\|^2 = \|Y_i\|^2 + \sum \lambda_j^2 \|Y_j\|^2$ donc $\|Y_i\| \leq \|X_i\|$
$|\det M| \leq \prod \|X_i\|$

* θ racine d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire
Mq θ racine de Q, $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire.
$\Leftrightarrow$ $\mathbb{Z}[\theta]$ a une famille génératrice finie.

Dem : $\Rightarrow$ $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $a_0 + a_1\theta + \dots + \theta^n = 0$ donc $\theta^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \theta^k$
Soit $\varphi \in \mathbb{Z}[\theta]$ $\varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \theta^k = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \theta^k + \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \theta^k$ or θ^k ${}_{k \geq n}$ s'écrit en fct des θ^j ${}_{j \leq n-1}$.
Donc $(1, \theta, \dots, \theta^{n-1})$ génératrice de $\mathbb{Z}[\theta]$.

$\Leftarrow$ $(\beta_0, \dots, \beta_{n-1})$ une famille génératrice finie de $\mathbb{Z}[\theta]$. Soit m_θ : $\begin{vmatrix} \mathbb{Z}[\theta] \to \mathbb{Z}[\theta] \\ \alpha \mapsto \theta\alpha \end{vmatrix}$
$\theta\beta_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij} \beta_j$ Soit $A = (a_{ij})$. $\chi_A = \det(A - XI_n)$ $\chi_A(\theta) = \det(A - \theta I_n)$
$\chi_A \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Mq $A - \theta I_n$ n'est pas inversible : $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \ker(A - \theta I_n)$ ${}_{\neq 0}$.
on aura $\boxed{\chi_A(\theta) = 0}$