152

Déterminant. Exemples et applications

Cadre : K désigne un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

I) Définition et premières propriétés du déterminant

1) Formes n-linéaires sur E, déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

[NDO p. 343]

Déf 1 : Une forme f n-linéaire sur E est dite
(i) antisymétrique si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_n)$.
(ii) alternée si $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ $(\exists i \neq j / x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1,\dots,x_n) = 0$

Prop 2 : Soit f une forme n-linéaire sur E. Si f est alternée, alors f est antisymétrique. Si f est antisymétrique et $car(K) \neq 2$, alors f est alternée.

[Gou] p. 135

Th-Déf 3 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1. De plus, si $B = (e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique forme n-linéaire alternée, notée $\det_B$, prenant la valeur 1 en $(e_1,\dots,e_n)$, donnée par : $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ $\det_B(x_1,\dots,x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}$ où $x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i$

Prop 4 : Si B et B' sont deux bases de E, alors
$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$ $\det_{B'}(x_1,\dots,x_n) = \det_{B'}(B) \det_B(x_1,\dots,x_n)$.

Th 5 : Soient $x_1,\dots,x_n \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) $(x_1,\dots,x_n)$ est une famille liée.
(ii) Pour toute base B de E, $\det_B(x_1,\dots,x_n) = 0$
(iii) Il existe une base B de E telle que $\det_B(x_1,\dots,x_n) = 0$.

2) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice.

[Gou] p. 136

Déf-Prop 6 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $B = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Le scalaire $\det_B(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est indépendant de la base B choisie. On l'appelle déterminant de f et on le note $\det(f)$.

Déf 7 : Soit $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(K)$. On définit le déterminant de M par :
$$\det M = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} m_{\sigma(i)i}$$

Rq 8 : Cette formule permet de définir le déterminant d'une matrice M à coefficients dans un anneau A. On a alors $\det(M) \in A$.

Déf 9 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique, noté χ_A, le polynôme de degré n $\chi_A = \det(A - X I_n)$.

Ex 10 : • $\det(0_n) = 0$ • $\det I_n = 1$
• Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$ alors $\det(A) = ad - bc$ et $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$.

Th 11 : Si $f \in \mathcal{L}(E)$, B est une base de E et $A = Mat_B(f)$, alors $\det A = \det f$.

[Gou] p. 136

Prop 12 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On a :
(i) $\det(A) = \det({}^tA)$ $\det(f) = \det({}^tf)$
(ii) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ est une forme n-linéaire alternée en les colonnes (resp. en les lignes)
(iii) $\forall \lambda \in K$ $\det(\lambda A) = \lambda^n A$
(iv) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$

Ctre-ex 13 : En général, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$: $\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 4 \neq 2 = \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right|$

Prop 14 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $f \in \mathcal{L}(E)$.
$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det A \neq 0$ $f \in GL(E) \Leftrightarrow \det f \neq 0$.

Prop 15 : Soient $A \in GL_n(K)$, $f \in GL(E)$. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$ $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$.

Rq 15 : Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in GL_n(K)$, $\det(P^{-1}AP) = \det A$.

[Gou] p. 136-137

Déf 16 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]$, on appelle mineur (i,j) extrait de A le déterminant Δ_{ij} de la matrice $(a_{kl})_{k \neq i, l \neq j} \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$; on appelle cofacteur (i,j), noté A_{ij}, le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Th 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On a :
• $\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (développement selon la j-ième colonne)
• $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ (développement selon la i-ème ligne)

Déf 18 : On appelle comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ la matrice $com(A) = (A_{ij})_{i,j}$

Th 19 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $A\,{}^tcom(A) = {}^tcom(A) A = \det(A) I_n$.

Rq 20 : Si $A \in GL_n(K)$ $A^{-1} = (\det A)^{-1}\,{}^tcom(A)$.

3) Formes adaptées au calcul

Prop 21. Si $T=(t_{ij})\in\mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors $\det(T)=\prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

Th 22. Si $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les racines du polynôme caractéristique χ_A de $A\in\mathcal{M}_n(K)$ dans une clôture algébrique de K, alors $\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

Prop 23. Si $A_1,\dots,A_k$ sont des matrices carrées, alors

$$\begin{vmatrix} \boxed{A_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{k}\det(A_i).$$

[Gri] p.136 **Ex 24.** Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(K)$ qui commutent. $\det\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A\end{pmatrix}=\det(A^2+B^2)$

Contre-ex 25. En général, $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\neq\det(A)\det(D)-\det(C)\det(B)$. Considérer $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

4) Exemples

[Gou] p.137 **Prop 26.** Soient $x_1,\dots,x_n\in K$. On appelle déterminant de Vandermonde le scalaire

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j-x_i)$$

Appl 27. Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$. (A est nilpotent) $\Leftrightarrow$ $(\forall k\leq n \;\; \mathrm{tr}(A^k)=0)$ si car $K=0$

[Gou] p.146 **Prop 28.** Soient $a_1,\dots,a_n\in K$ et $P=a_1+a_2X+\dots+a_nX^{n-1}$. On a :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & \cdots & & a_1\end{vmatrix}=P(1)P(\omega)\cdots P(\omega^{n-1}) \quad \text{où } \omega=e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

[Gou] p.143 **Prop 29.** Soient $a_1,\dots,a_n\in K$, $b_1,\dots,b_n\in K$ tq $\forall i,j \;\; a_i+b_j\neq 0$. On a :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}=\frac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$$

Th 30 (Frobenius-Zolotarev). Soient $p\geq 3$ un nombre premier et $u\in GL_n(\mathbb{F}_p)$. On a : $\varepsilon(u)=\left(\frac{\det u}{p}\right)$ où $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ est le symbole de Legendre : [OA] p.251

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 0 & \text{si } a\equiv 0 \bmod p \\ 1 & \text{si } a \text{ est un carré mod } p \\ -1 & \text{sinon}\end{cases}$$

et $\varepsilon(u)$ est la signature de u en tant que permutation de $\mathbb{F}_p^n$.

II) Applications en algèbre et géométrie

1) Déterminant et rang d'une matrice, d'une famille de vecteurs

Def 31. Un mineur d'ordre r de $A\in\mathcal{M}_n(K)$ est le déterminant d'une matrice de taille r extraite de A en choisissant r lignes et r colonnes.

Prop 32. $A\in\mathcal{M}_n(K)$ est de rang r ssi il existe un mineur d'ordre r non nul et tous les mineurs d'ordre $s>r$ sont nuls.

Appl 33. Si $A\in\mathcal{M}_n(K)$, $\mathrm{rg}(\mathrm{com}(A))=\begin{cases} n & \text{si } \mathrm{rg}(A)=n \\ 1 & \text{si } \mathrm{rg}(A)=n-1 \\ 0 & \text{si } \mathrm{rg}(A)\leq n-2.\end{cases}$ [Gou] p.146

[Gri] p.123-127

Prop 34. Soient $(x_1,\dots,x_r)\in E^r$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_r)$ pour $\mathcal{B}$ une base quelconque de E. $(x_1,\dots,x_r)$ est libre si et seulement si on peut extraire de A un mineur non nul d'ordre r.

Def 35. Soit $A\in\mathcal{M}_n(K)$ et δ un mineur d'ordre r extrait de A. On appelle bordant de δ tout mineur d'ordre $r+1$ extrait de A dont δ est extrait.

Ex 36. δ [illegible]. [illegible] et [illegible] sont des bordants de δ.

Prop 37. Soient $(x_1,\dots,x_r)$ une famille libre de E et $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ pour $\mathcal{B}$ base de E. Soit δ un mineur d'ordre r non nul extrait de A. $y\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_r)$ ssi tous les bordants de δ dans $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_r,y)$ sont nuls.

Ex 38. Soient $x_1=\begin{pmatrix} 1\\2\\3\end{pmatrix}$ $x_2=\begin{pmatrix} 0\\1\\2\end{pmatrix}$. $y=\begin{pmatrix} \alpha\\ \beta \\ 7\end{pmatrix}\in\mathrm{Vect}(x_1,x_2)\Leftrightarrow\alpha=1,\beta=2$.

2) Résolution de systèmes linéaires

Th 39. Soient $A\in GL_n(K)$ et $B\in\mathcal{M}_{n,1}(K)$. On note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de A. Le système linéaire $AX=B$ admet une unique solution $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ donnée par $\forall i \;\; x_i=\frac{\det M_i}{\det A}$ où M_i est la matrice de colonnes $(C_1,\dots,C_{i-1},B,C_{i+1},\dots,C_n)$. [Gou] p.138

[Formule de Cramer]

3) Interprétation géométrique

[Gr] p.134 **Th 40 :** Soient $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Vol}(v_1,\dots,v_n)$ le volume du parallélépipède engendré par $v_1,\dots,v_n$. On a $\mathrm{Vol}(v_1,\dots,v_n) = |\det_{\mathcal{B}}(v_1,\dots,v_n)|$, où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

[Gou] p.262 **Prop 41 (Hadamard) :** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ dont on note les colonnes $X_1,\dots,X_n$. Alors
$$|\det(A)| \leq \|X_1\|_2 \cdots \|X_n\|_2$$ avec égalité ssi $A \in O_n(\mathbb{R})$.

p-e ro.col orthogonaux suffit

Rq 42 : À longueurs des côtés fixés, le rectangle est le parallélépipède de volume maximal.

Prop

[Zav] p.73 **Appli 43 :** Déterminant de Cayley-Menger. Si $(x_0,\dots,x_n) \in E^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors
$$\det(x_1-x_0,\dots,x_n-x_0)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\Gamma(x_0,\dots,x_n) \text{ où } \Gamma(x_0,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & d_{ij}^2 & \\ \vdots & d_{ij}^2 & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}$$ avec $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$

Rq 44 : Formule de Héron. Si a,b,c les longueurs des côtés du triangle T, alors
$$\mathcal{A}(T) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$$

Appli 45 : Soit $(d_{ij})_{ij}$ ~~sont~~ des réels tels que $d_{ij} = d_{ji} > 0$ si $i \neq j$, $d_{ii} = 0 \ \forall i$.
Il existe des points $x_0,\dots,x_n$ de E sommets d'un simplexe de E tels que $\|x_i - x_j\| = d_{ij}$ si et seulement si pour toute famille $(i_1,\dots,i_k)$ d'indices dans $[\![0,n]\!]$, le déterminant de Cayley-Menger associé est de signe $(-1)^k$. DVP

III) Étude et applications analytiques du déterminant ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Régularité

Prop 46 : Le déterminant est une application polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

[Gou] p.183 **Cor 47 :**
- $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{K})$
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$
- $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

[Gou] p.188 [$\{A \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{rg} A = r\}$ = $\{A \in M_n(\mathbb{R}), \operatorname{rg} A \leq r\}$. Le rang est semi-continu inférieurement

Prop 48. Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, $D\det(A).H = \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{Com}(A)H)$ $\forall H \in M_n(\mathbb{R})$. [Rou] p.83

[Gou An] p.369 ou [Roy] **Application 49 :** Soit $(y_1,\dots,y_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $y'(t) = A(t)y(t)$. On définit le wronskien associé par $W(t) = \det_{\mathcal{B}}(y_1(t),\dots,y_n(t))$. On a : $W'(t) = \operatorname{tr}(A(t))W(t)$.

[Gou An] p.376 **Prop 50 :** Soit (f,g) un système fondamental de solutions de l'EDO $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ où p,q sont continues sur un intervalle I. Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de f. Il existe un unique $t_0 \in]t_1,t_2[$ tq $g(t_0) = 0$.

2) Jacobien

Déf 51 : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit la matrice jacobienne de f en x par $({}^tDf(x))\ J(f)(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{ij}$.
Son déterminant est appelé le déterminant jacobien de f en x.

Th 52 : Soient U,V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ une fonction et $f : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On a :
$$\int_V \varphi(y)\,dy = \int_U \varphi(f(x))\,|\det Df(x)|\,dx$$

Ex 53 : Coordonnées polaires. L'application $\Phi : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_-\times\{0\}) \\ (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et $\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$, $\det D\Phi(r,\theta) = r$.

Application 54 : Si X,Y sont des variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et définissant les coordonnées de points de $\mathbb{R}^2$, alors $R^2 = X^2 + Y^2$ et $\Theta = \arg(X+iY)$ vérifient $R^2 \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi])$.

Prop 55 : Soient U,V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $0 \in U$. Soit f un $\mathcal{C}^1$ difféo de U sur V tq $f(0) = 0$. Alors $|\det Df(0)| = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda(f(B(0,r)))}{\lambda(B(0,r))}$. [Rou] p.89

Prop 56 (Ellipsoïde de John-Loewner) : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K. DVP

[RDO] Ramis, Deschamps, Odoux, Algèbre 1
[GOU] Gourdon, Algèbre, 2e édition
[GouAn] Gourdon, Analyse, 2e édition
[Gri] Grifone, Algèbre linéaire, 5e édition
[OA] Beck, Malick, Peyré, Objectif Agrégation, 2e édition
[ROU] Rouvière, Petit guide de calcul différentiel, 4e édition

1 Déterminant de Cayley-Menger

Source : Zavidovique, *Un max de maths*

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne standard, on note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique orthonormée pour le produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et d'une forme volume caractérisée par $\det(e_1, \ldots e_n) = 1$

Définition. *Soient $x_0, \ldots, x_n$ des points, et $d_{ij} = d(x_i, x_j) = d_{ji} = \|x_i - x_j\|$ (notons que l'on a $d(x_i, x_i) = 0$). On définit le déterminant de Cayley-Menger par :*

$$\Gamma(x_0, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & d_{0,0}^2 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n}^2 \\ 1 & d_{1,0}^2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & d_{n,n} \end{vmatrix}$$

Propriété. *Si $x_0, \ldots, x_n$ sont des points de $\mathbb{R}^n$ l'on a la caractérisation suivante du volume du simplexe défini par ces points :*

$$\det(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \Gamma(x_0, \ldots, x_n)$$

Corollaire. *Dans le cas de trois points on retrouve la formule de Héron, avec a, b, c les trois distances entre les points :*

$$S = \sqrt{\frac{1}{8}(a+b+c)(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Démonstration. Les calculs sont inintéressant au possible :

$$\det(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0) = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 - x_0^1 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 \\ x_1^1 - x_0^1 & \cdots & x_1^n - x_0^n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^1 - x_0^1 & \cdots & x_n^n - x_0^n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On écrit ensuite le déterminant recherché comme étant ce déterminant multiplié par sa transposée :

$$\det(x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_0)^2 = \begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

puis on permute les deux dernières lignes du deuxième déterminant :

$$= -\begin{vmatrix} x_0^1 & \cdots & x_0^n & 1 & 0 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^n & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

En refusionnant tout cela :

$$= -\begin{vmatrix} \langle x_0, x_0 \rangle & \langle x_0, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_0, x_n \rangle & 1 \\ \langle x_1, x_0 \rangle & \langle x_1, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_0 \rangle & \langle x_n, x_1 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

puis, l'on a $\langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{2}(\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - d_{ij}^2)$,
Ce qui permet d'obtenir :

$$= -\begin{vmatrix} \|x_0\|^2 & \cdots & \frac{\|x_0\|^2+\|x_n\|^2-d_{0,n}}{2} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\|x_n\|^2+\|x_0\|^2-d_{0,n}}{2} & \cdots & \|x_n\|^2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

l'on fait maintenant disparaître les normes en utilisant les 1 sur les dernières lignes et colonnes (ça marche bien), et finalement :

$$= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{d_{0,1}^2}{2} & \cdots & -\frac{d_{0,1}^2}{2} & 1 \\ -\frac{d_{1,0}^2}{2} & 0 & \cdots & -\frac{d_{1,n}^2}{2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\frac{d_{n,0}^2}{2} & -\frac{d_{n,1}^2}{2} & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

On multiplie ensuite toutes les colonnes sauf la dernière par -2, et finalement la dernière ligne par $-1/2$:

$$= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,1}^2 & 1 \\ d_{1,0}^2 & 0 & \cdots & -d_{1,n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_{n,0}^2 & d_{n,1}^2 & \cdots & 0 & 1 \\ -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^n}{2^n}\Gamma(x_0, \ldots, x_n)$$

□

La partie intéressante maintenant, une forme de réciproque permettant de construire, étant données des distances un simplexe ayant ces distances pour côtés :

Théorème. *On se place toujours dans* $\mathbb{R}^n$

Soient $(d_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ *des nombres réels positifs tels que pour tous* i, j, $d_{i,j} = d_{j,i} > 0$ *si* $i \neq j$ *et* $d_{i,i} = 0$.

Il existe des points $x_0, \ldots, x_n$ *sommets d'un simplexe non dégénéré tels que pour tous* i, j, $d_{i,j} = \|x_i - x_j\|$ ***si et seulement si*** *pour toute sous famille de* k *indices* $i_1, \ldots, i_k$ *dans* $\{0, \ldots, n\}$, *le déterminant de Cayley-Menger associé à ces réels est de signe* $(-1)^k$.

Démonstration. **Sens direct :**

L'égalité précédente donne le résultat, puisqu'une sous famille de h distances correspond à une sous famille de h points qui forment un simplexe dans $\mathbb{R}^{h-1}$, et le signe du déterminant de Cayley-Menger est donné par le $(-1)^h$.

Sens réciproque :

On procède par récurrence d'ordre 2 sur la dimension n.

Initialisation : En dimension 1 ou 2 le résultat est vrai, dans $\mathbb{R}$ il suffit de placer un point en 0 et l'autre à distance $d_{0,1}$. En dimension 2 c'est une construction classique au compas.

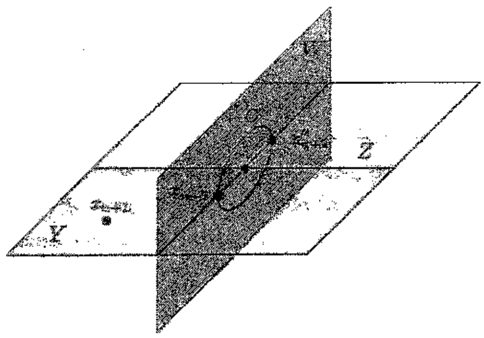
Hérédité : Soient $(d_{i,j})_{0\leq i,j\leq n+2}$ des distances comme dans les hypothèses. Soit Z un sous espace vectoriel de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+2}$, on applique dessus la propriété de récurrence avec les $(d_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$, ce qui permet de construire les premiers points $x_0, \dots, x_n$.

Soit Y un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+2}$ contenant Z, on applique dessus la propriété de récurrence avec les $(d_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$ en faisant coïncider les premiers points, ainsi l'on a construit un nouveau point x_{n+1}.

Sur ce même hyperplan on applique à nouveau la propriété de récurrence avec $(d_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n,n+2\}}$, ce qui permet de construire de la même manière un point x'_{n+2}.

Notons h le projeté orthogonal de x'_{n+2} sur Z, et W l'espace affine de dimension 2 orthogonal à Z passant par h (il est supplémentaire orthogonal de Z). Et soit $\mathcal{C}$ le cercle inclus dans W passant par x'_{n+2} de centre h.

Alors, notons que pour tout $x \in \mathcal{C}$, et pour tout $i \leq n$, $\|x - x_i\| = d_{i,n+2}$. C'est à dire qu'il ne reste qu'à trouver sur le cercle un point vérifiant $\|x - x_{n+1}\| = d_{n+1,n+2}$. On note x''_{n+2} l'autre point d'intersection du cercle et de W, on supposera (quitte à échanger les points x'_{n+2} et x''_{n+2}) que le point x'_{n+2} est le plus proche de x_{n+1} (c'est à dire du même côté dans Y par rapport à Z).



Si $\xi \in \mathbb{R}$, on définit :

$$G(\xi) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{0,1}^2 & \cdots & d_{0,n+1}^2 & d_{0,n+2}^2 \\ 1 & d_{1,0}^2 & 0 & \cdots & d_{1,n+1}^2 & d_{1,n+2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & d_{n+1,0}^2 & d_{n+1,1}^2 & \cdots & 0 & \xi \\ 1 & d_{n+2,0}^2 & d_{n+2,1}^2 & \cdots & \xi & 0 \end{vmatrix}$$

C'est le déterminant de Cayley-Menger dans lequel on a remplacé la distance $d_{n+1,n+2}^2$ par ξ. Cette fonction est polynomiale de degré 2, elle est de la forme, en développant par rapport aux deux dernières colonnes :

$$G(\xi) = -\Gamma(x_0, \dots, x_n)\xi^2 + a\xi + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Par hypothèse, $\Gamma(x_0, \dots, x_n)$ est de signe $(-1)^{n+1}$, et $G(d_{n+1,n+2})$ est de même signe. On sait aussi, puisque les simplexes engendrés par $(x_0, \dots, x_n+1, x'_{n+2})$ et $(x_0, \dots, x_n+1, x''_{n+2})$ sont de volume nuls (dégénérés), que $G(\|x_{n+1} - x'_{n+2}\|) = G(\|x_{n+1} - x''_{n+2}\|) = 0$.

Comme G est polynomiale du second degré, elle est de signe opposé à son coefficient dominant entre ses racines, c'est à dire sur $I = [\|x_{n+1} - x'_{n+2}\|, \|x_{n+1} - x''_{n+2}\|]$, et $d^2_{n+1,n+2} \in I$ puisque son image par G est du même signe. Or, quand x parcourt $\mathcal{C}$, $G(\|x - x_{n+1}\|)$ parcourt exactement I et donc, par le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists x_{n+2} \in \mathcal{C}, \ \|x_{n+2} - x_{n+1}\| = d_{n+1,n+2}$$

□

2 L'ellipsoïde de John-Loewner

Source : Oraux X-ENS algèbre 3 ; site de Florian Lemonnier.

Théorème. *Soit K compact de $\mathbb{R}^n$ d'intérieur non vide, il existe un unique ellipsoïde centré en 0 contenant K de volume minimal.*

On note Q, Q_+ et Q_{++} l'espace des matrices symétriques, symétriques positives et définies positives respectivement.

Simplifions le problème. Soit $q \in Q_{++}$, alors dans une bonne base, on peut écrire : $q(x) = \sum_i a_i x_i^2$

$$V_q = \int \dots \int_{a_1x_1^2+\dots+a_nx_n^2 \leq 1} \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Par un habile changement de variable $x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$ de jacobien $\frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}}$ on obtient :

$$V_q = \int \dots \int_{x_1^2+\dots+x_n^2 \leq 1} \frac{\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} = \frac{V_0}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}$$

Où V_0 est le volume de la boule unité.

De plus, le déterminant de S matrice de q est invariant par changement de base orthonormée, on a donc $D(q) = det(S) = a_1 \dots a_n$. Ainsi, le travail se limite à étudier la fonction $q \mapsto D(q)$ et à la maximiser.

Définissons : $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$ norme sur Q (toutes sont équivalentes).

On va chercher à maximiser D sur $\mathcal{A} = \{q \in Q_+, \forall x \in K | q(x)| \leq 1\}$.
Défini ainsi, $\mathcal{A}$ est compact, convexe et non vide :
– Convexe
Si q et q' sont des éléments de $\mathcal{A}$, et $\lambda \in [0,1]$. Alors, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) > 0$$

Et si $x \in K$,

$$\lambda q(x) + (1-\lambda)q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda \leq 1$$

Et donc $\lambda q + (1-\lambda)q' \in \mathcal{A}$.

– Fermé

Soit (q_n) suite de $\mathcal{A}$ qui converge vers q dans Q. Alors :

$$|q(x) - q_n(x)| \leq N(q - q_n)\|x\|$$

– Borné

Soit $q \in \mathcal{A}$, K est d'intérieur non vide donc il existe $a \in K$ et $r > 0$ tels que $B(a, r) \subset K$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, si $\|x\| < r$, alors $a + x \in K$ et donc $q(a + s) < 1$. De plus $q(a) = q(-a)$ et donc :

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x + a - a)} \leq \sqrt{q(x + a)} + \sqrt{q(a)} \leq 2$$

Et donc : $q(x) \leq 4$.

Si $\|x\| \leq 1$, $q(x) = \frac{1}{r^2}q(rx) \leq \frac{4}{r^2}$ et donc $N(q) \leq \frac{4}{r^2}$.

– Non vide

K est borné, donc il est inclus dans $B(0, M)$ pour un certain M, et donc $\left(q : x \mapsto \frac{\|x\|}{M}\right) \in A$

Par tous ces arguments il existe un maximum de cette fonction atteint q_0 et comme $D(q_0) \geq D\left(\left(q : x \mapsto \frac{\|x\|}{M}\right)\right) > 0$, $q_0 \in Q_{++}$

– Unicité

Pour cela on a besoin du lemme suivant :

Lemme 1. *Soient A, $B \in S_n^{++}$, α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Alors on a :*

$$\det(\alpha A + \beta B) > (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$$

Avec une égalité stricte si $A \neq B$.

Démonstration. Par pseudo-réduction simultanée de A et B (on en réduit l'une en $PAP^T = I_n$ puis on réduit $P^T BP$ en $R^T P^T BPR$ diagonale et c'est bon) il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T P$ et $B = P^T DP$, avec $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a alors : $\det(A)^\alpha \det(B)^\beta = (\det P)^{2\alpha}(\det P)^{2\beta}(\det D)^\beta = (\det P)^2(\det D)^\beta$.
De plus : $\det(\alpha A + \beta B) = (\det P)^2(\det \alpha I_n + \beta D)$; et :

$$\det(\alpha I_n + \beta D) \geq (\det D)^\beta \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln(\lambda_i)$$

Par convexité du ln :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i)$$

d'où le résultat en sommant sur i. Si $A \neq B$ l'inégalité est stricte par stricte convexité du ln. □

Et alors, si q et q_0 atteignent le maximum on a :

$$D\left(\frac{1}{2}(q + q_0)\right) = \det\left(\frac{1}{2}(S + S_0)\right) > (\det S)^{1/2}(\det S_0)^{1/2} = \det(q_0)$$