Leçon : 152 : Déterminants. Exemples et applications.

Références : Grifone, Francinou Algèbre 2, Gourdon Analyse + Algèbre

Motivations : Une première notion de déterminant a été introduite par Cramer (~ 1750) pour la résolution de systèmes d'équations linéaires. Au cours du XIXe siècle : formalisation par Cauchy. Applications nombreuses : algèbre linéaire, analyse et géométrie.

Cadre : Sauf précision contraire, E est un k-ev. de dimension finie n, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I) Définitions et premières propriétés

1) Forme linéaire alternée

* Déf : Une forme f n-linéaire alternée est une forme de E^n dans k, linéaire en chacune de ses variables $(x_1, \dots x_n)$ et vérifiant :
- Si on échange deux x_i alors $f \to -f$
- Si deux x_i sont égaux alors $f = 0$

(ces deux propriétés sont équivalentes pour $\mathrm{Car}\, k \neq 2$)

* Théorème : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E^n est un k-ev de dimension 1.

* Si $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe une forme f (unique) n-linéaire alternée telle que $f(\mathcal{B}) = 1$

* Définition : On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, la forme n-lin. alternée telle que $f(\mathcal{B}) = 1$. On la note $\det_{\mathcal{B}}$.

* Propriété : Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors on a $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$

2) Propriétés du déterminant

* La famille $(x_i)_{i=1,\dots n}$ est liée $\Leftrightarrow \det(x_i) = 0$

* Toutes les propriétés du déterminant sur les lignes peuvent s'énoncer sur les colonnes

* Si on échange deux lignes, le déterminant change de signe

* Le déterminant est linéaire en chaque ligne.

* Le déterminant ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres.

3) Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

* Déf : Soit f un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,n}$ une base quelconque de E. On appelle déterminant de f, le déterminant $\det_{\mathcal{B}}(f(e_i))$

* Ex : $\det_{\mathcal{B}} Id = 1$ (par construction).

* Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, f son endomorphisme associé et $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de A dans la base $\mathcal{B}$: $\det_{\mathcal{B}} A = \det_{\mathcal{B}} f$.

* Formule explicite : si S_n est l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots n\}$ alors si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ on a :

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}} A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

II) Déterminant en algèbre linéaire

1) Propriétés du déterminant d'une matrice

* $A \in GL_n(k) \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}} A = 0$ dans toute base

* Le déterminant est indépendant de la base considérée

* Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ est triangulaire supérieure et que $\{\lambda_1, \dots \lambda_n\}$ sont ses éléments diagonaux, alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$
* Si $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ est triangulaire par blocs on a $\det A = \det B \times \det D$.
* Si A et $B \in \mathcal{M}_n(k)$, alors $\det AB = \det A \times \det B$
* $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $\det {}^tA = \det A$. Si A inversible alors $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
* Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$.

Conséquence: $\forall A \in \mathcal{M}_n(k)$, $\exp(A) \in GL_n(k)$.

* Si N est nilpotente, $\det N = 0$. Si U est unipotente alors $\det U = 1$.

Conséquence: $A = D + N$ (Dunford) $\Rightarrow \mathrm{Sp} A = \mathrm{Sp} D$.

2) Calcul de l'inverse d'une matrice

*Déf: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, $A = (a_{ij})_{i,j=1\dots n}$. On note A_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(k)$ obtenue en supprimant de A la i^e ligne et la j^e colonne. On appelle cofacteur de l'élément a_{ij} : $\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

*Théorème (Exemple en annexe): $\begin{cases} \det A = a_{i1}\,\mathrm{cof}(a_{i1}) + \dots + a_{in}\,\mathrm{cof}(a_{in}) \\ \det A = a_{1j}\,\mathrm{cof}(a_{1j}) + \dots + a_{nj}\,\mathrm{cof}(a_{nj}) \end{cases}$

*Déf: On appelle comatrice de A la matrice constituée de tous les cofacteurs des éléments de A. On la note $\mathrm{com}\,A$.

*Théorème: Si $A \in GL_n(k)$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot {}^t\mathrm{com}\,A$

*Application: Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, les matrices inversibles sont de déterminant ± 1.

3) Polynôme caractéristique

Ici on se place dans $\mathcal{M}_n(k[X])$ (ou dans $\mathcal{M}_n(k(X))$ si l'on veut garder un corps).

*Déf: Soit $A \in \mathcal{M}_n(k)$, on définit le polynôme caractéristique χ_A de A par $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$.

*Théorème (Cayley-Hamilton): $\chi_A(A) = 0$.

*Corollaire: λ valeur propre de $A \Leftrightarrow \lambda$ racine de χ_A

*Propriété: A trigonalisable $\Leftrightarrow \chi_A$ scindé sur k

*Matrice compagnon: Soit $P \in k[X]$, unitaire, avec $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_0$. On appelle matrice compagnon C_P de P la matrice $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$

Alors $P(X) = (-1)^p \chi_{C_P}(X)$.

4) Résolution de systèmes d'équations linéaires

Soit $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ un système d'éq. linéaires où $A = (a_{ij})$ avec $\det A \neq 0$

*Déf: un tel système s'appelle un système de Cramer

*Théorème: Un système de Cramer admet une et une seule solution

*Formule de Cramer: $x_i = \dfrac{\det(a_1, \dots a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots a_n)}{\det A}$ où $a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

Exemple: voir annexe

5) Quelques déterminants usuels

*Vandermonde: $V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \det V = \prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_j - a_i)$

*Déterminant circulant: $C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & & & \\ c_1 & c_2 & \dots & c_0 \end{pmatrix}$

$\det C = \prod_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j \omega^{kj}$ où $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

* Déterminant de Cauchy : Soient $(\alpha_1, \dots \alpha_m) \in k^n$ et $(\beta_1, \dots \beta_m) \in k^n$ tels que $\forall i,j = 1, \dots m$, $\alpha_i + \beta_j \neq 0$. Alors $\det\left(\frac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)_{i,j=1,\dots m} = \frac{\prod_{1 \leq i,j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq m} (\alpha_i + \beta_j)}$

III). Applications en analyse

1) La "fonction" déterminant

On munit ici E d'une norme (ou d'une topologie).

* Théorème : Si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ avec $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots m}$ alors $\det A$ est une fonction continue dans ses variables $(a_{ij})_{i,j=1,\dots m}$ (c'est une fonction polynomiale)

* Théorème : Le déterminant est une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $D\det(A)(H) = \mathrm{Tr}[({}^t\mathrm{com}\, A) \cdot H]$. $\boxed{\text{DEV 1}}$

Application : Etude du Wronskien

* Corollaire : Le déterminant est une fonction holomorphe des ses coefficients (en tant que fonction polynomiale)

2) Distance dans un espace pré-hilbertien

Déf : Déterminant de Gram : Soit H un espace pré-hilbertien et $(x_i)_{i=1,\dots m}$ une famille de vecteurs de H. On appelle déterminant de Gram de $x_1, \dots x_m$, noté $G(x_1, \dots x_m)$, le déterminant de la matrice $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$.

Théorème : Si V est un sous-espace de H, muni de la base $(v_1, \dots v_m)$, et $x \in H$, alors la distance de x à V vérifie $d^2 = G(v_1, \dots v_m, x) / G(v_1, \dots v_m)$.

Application : Théorème de Müntz : Soit $(\alpha_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs $\neq 0$ et strictement croissante. Alors :

$\mathrm{Vect}(x \mapsto x^{\alpha_m} \mid m \in \mathbb{N}^*)$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_2 \Leftrightarrow \sum_m \frac{1}{\alpha_m}$ diverge. $\boxed{\text{DEV 2}}$

IV) Théorie des groupes et géométrie

1) Orientation des bases

Soit E un $\mathbb{R}$-ev. de dimension n et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

* Déf : $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation si $\det P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} > 0$.

* Proposition : L'ensemble des bases de E se partage en deux sous-ensembles disjoints non vides, au sein desquels toutes les bases ont même orientation.

2) Déterminant comme volume

* Théorème : Soient $(v_1, \dots v_m)$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le volume du parallélépipède engendré par $(v_1, \dots v_m)$ est donné par $\mathrm{Vol}(v_1, \dots v_m) = |\det(v_1, \dots v_m)|$.

3) Inégalité de Hadamard

* Théorème : Soient $X_1, \dots X_n$ les vecteurs colonnes de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $|\det M| \leq \|X_1\| \dots \|X_n\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme hermitienne standard.

* Application : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $\exists\, c > 0$, $|a_{ij}| < c$ pour tous $i,j = 1, \dots m$. Alors $|\det A| \leq c^m m^{m/2}$.

4) Isométrie dans un espace euclidien

* Déf : Soit E un e.v. euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. f est une isométrie si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$. L'ensemble des isométries forment le groupe orthogonal de E : $O(E)$

* Proposition : $f \in O(E) \Leftrightarrow \det f = \pm 1$.

* Déf : $\mathrm{Ker}[\det : O(E) \to \{-1, 1\}]$ est le groupe spécial orthogonal $SO(E)$. Il est distingué.

* Application dans $\mathbb{R}^2$: SO_2 = groupe des rotations.

Annexes :

(a). Exemple de calcul de déterminant par développement en cofacteurs :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ On développe sur la première colonne par exemple.

$$\det A = 1 \times \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0 \times \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \times \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = -1 + (-2) \times 5 = -11.$$

Développement selon la dernière ligne :

$$\det A = -2 \times \det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0$$

$$= -2 \times 5 - 1 = -11.$$

(b) Exemple de résolution de système :

$$\begin{cases} 2x + 1 = 1 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det A = -3 \Rightarrow$ le système est de Cramer

Solution unique :

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{-3} = 1, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-3} = -1.$$