152

Déterminant. Exemples et applications.

Cadre : $\mathbb{K}$ corps commutatif, E $\mathbb{K}$-ev de dimension $0 < n < \infty$.

I) Définitions

1. Formes p-linéaires sur E : $\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ $(p \geq 2)$

Déf 1 : $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ est une forme p-linéaire sur E si en tout point, chaque application partielle est une forme linéaire :
$\forall i = 1 \dots p$, $\forall (a_j)_{1\leq j \leq p, j\neq i} \in E^{p-1}$, $\varphi_i : x \mapsto \varphi(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_p) \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$

Prop 2 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\varphi \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$, $(x_i)_{1\leq i\leq p} \in E^p$.
Alors, en notant $x_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij} e_j$ pour tout $i = 1 \dots p$,

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = \sum_{1\leq j_1, \dots, j_p \leq n} x_{1j_1} \cdots x_{pj_p} \varphi(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

$$= \sum_{f\in\mathcal{F}} \prod_{i=1}^{p} x_{if(i)} \varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(p)}) \quad \text{où } \mathcal{F} = \{f : \{1 \dots p\} \to \{1 \dots n\}\}$$

et l'application $\varphi \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K}) \mapsto \left(\varphi(e_{f(1)}, \dots, e_{f(p)})\right)_{f\in\mathcal{F}} \in \mathbb{K}^{n^p}$ est bijective. En particulier $\dim(\mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})) = n^p$.

Déf 3 : $\varphi \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$ est dite alternée si $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$.

Prop 4 : Si $car(K) \neq 2$, alors φ est alternée ssi pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$,

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, \dots, x_p)$$

2. Déterminant

Prop 5 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'ev $\mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ des formes n-linéaires alternées est de dimension 1 engendré par l'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i\sigma(i)}$$

C'est l'unique $\varphi \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$ tel que $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Déf 6 : On dit que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant dans la base $\mathcal{B}$ du n-uplet de vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

Prop 7 : (Relation de Chasles) Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Corollaire 8 : $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = 1$.

Prop 9 : $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée
(ii) pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$
(iii) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0$

Corollaire 10 : $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une base de E ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Théorème 11 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire $\lambda_u \in \mathbb{K}$ tel que pour toute forme $\varphi \in \mathcal{A}_n(E,\mathbb{K})$, $\forall (x_i)_{1\leq i\leq n} \in E^n$, $\varphi(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda_u \varphi(x_1, \dots, x_n)$.
En particulier $\lambda_u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E.

Déf 12 : On dit que λ_u est le déterminant de u, noté $\det(u)$.

Prop 13 : (i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$
(ii) $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det(u)\det(v)$
(iii) $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible ssi $\det(u)$ l'est et dans ce cas $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$.

Déf 14 : Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de A est défini par : $\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

Remarque 15 : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ a pour matrice A dans une base $\mathcal{B}$ de E alors $\det(u) = \det(A)$.

Prop 16 : (i) $\det(\lambda A) = \lambda^n A$ (ii) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
(iii) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A)$ est inversible et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Remarque 17 : Si R est un anneau commutatif et $A \in \mathcal{M}_n(R)$, on définit comme en déf. 14 le déterminant de A qui vérifie dans les mêmes points qu'en prop. 16.

Déf 18 : R anneau commutatif. La comatrice de $A \in M_n(R)$ est :

$\mathrm{com}(A) = \left((-1)^{i+j} \det(A_{i,j})\right)_{1 \le i,j \le n}$ où $A_{i,j}$ est la matrice déduite de A en retirant la $i$ème ligne et $j$ème colonne.

Prop 19 : On a pour $A \in M_n(R)$: $(\det A) I = A({}^t\mathrm{com}(A))$

Corollaire 20 : $A \in M_n(R)$ est inversible ssi $\det A \in R^\times$.

Corollaire 21 : $A \in M_n(R)$. On peut developper le déterminant suivant :

- la colonne $1 \le j \le n$: $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$
- la colonne $1 \le i \le n$: $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{i,j})$

Prop 22 : Le rang d'une matrice est la taille de sa plus grande matrice carrée extraite de déterminant non nul.

II / Déterminant : une application polynomiale

1) Une application régulière

Prop 23 : $M \in M_n(K) \mapsto \det M$ est polynomiale (donc en particulier continue et différentiable) en les coefficients de $M \in M_n(K)$.

Application 24 : (propriétés topologiques de $M_n(\mathbb{K})$)

(i) $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{K})$.

(ii) Si $\mathbb{K}$ est infini, $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

(iii) $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe.

(iv) Si $\mathbb{K}$ est infini, $M \in M_n(\mathbb{K})$, alors il existe un voisinage V de M tel que : $\forall M' \in V$, $\mathrm{rg}(M') \geq \mathrm{rg}(M)$.

Prop 25 : L'application déterminant a pour différentielle : $\forall M, H \in M_n(\mathbb{K})$, $d(\det)(M) \cdot H = \mathrm{tr}({}^tH\, \mathrm{com}(M))$.

Application 26 : Soient $y_1, \dots, y_n : I \to \mathbb{R}^n$ (I intervalle de $\mathbb{R}$) des solutions du système différentiel linéaire $y' = A(t)\, y$ où $A(t) \in M_n(\mathbb{R})$ est une fonction continue de $t \in I$. Soit

$$w(t) = \det(y_1(t), \dots, y_n(t))$$

leur déterminant wronskien. Alors $w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}(A(s))\,ds\right) w(t_0)$ où $t_0 \in I$ est quelconque. Le wronskien ne peut s'annuler sans être partout nul.

2) Résultant.

Déf 27 : A anneau commutatif, $P, Q \in A[X]$, $n = \deg P$, $m = \deg Q$

Le résultant de P et Q est le déterminant de l'application :

$\Phi_{P,Q} : (U,V) \in A_{m-1}[X] \times A_{n-1}[X] \mapsto UP + VQ \in A_{n+m-1}[X]$

avec $((X^i, 0), (0, X^j))_{0 \le i \le m-1, \, 0 \le j \le n-1}$ comme base au départ et $(X^k)_{0 \le k \le n+m-1}$ à l'arrivée.

On le note $\mathrm{res}(P,Q)$.

Prop 28 : A anneau commutatif factoriel, $P, Q \in A[X]$. Alors $\mathrm{res}(P,Q) \neq 0$ ssi P et Q ont un facteur constant.

Application 29 : (Equation cartésienne d'une courbe paramétrique) DEVT 1

Soit $\Gamma = \{(P(t), Q(t)) \in A^2, t \in A\}$ où A anneau factoriel $P, Q \in A[X]$.

Alors il existe $R \in A[X,Y]$ tel que :

$\forall (x,y) \in A^2$, $(x,y) \in \Gamma \iff R(x,y) = 0$.

Application 30 : Si $\mathbb{K}$ infini, $P, Q \in \mathbb{K}[X,Y]$, $P \wedge Q = 1$. alors les courbes $\{(x,y) \in \mathbb{K}^2, P(x,y) = 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{K}^2, Q(x,y) = 0\}$ ont au plus $\deg P \times \deg Q$ points d'intersection.

Application 31 : L'ensemble des nombres algébriques sur $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos. DEVT 2

Déf 32 : Soit A un anneau commutatif. Le discriminant $\mathrm{disc}(P)$ d'un polynôme $P \in A[X]$ est le résultant de P et P'.

Prop 33 : Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{disc}(P) \neq 0 \iff P$ a une racine multiple sur $\mathbb{K}$.

Application 34 : L'ensemble des matrices dans $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Par continuité du déterminant, on en déduit une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

Application 35 : L'intérieur des matrices diagonalisables sur $M_n(\mathbb{C})$ est l'ensemble des matrices ayant n valeurs propres distinctes sur $\mathbb{C}$.

III / Le déterminant en tant que volume

Déf 36 : Le parallélépipède k-dimensionnel d'arêtes $(x_i)_{1 \le i \le k} \in (\mathbb{R}^n)^k$ est par définition $P_{x_1, \dots, x_k} = \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \ 0 \le \lambda_i \le 1, i = 1 \dots k\right\}$. On note alors $O(P_{x_1,\dots,x_n}) = 0$

- $P_{x_1, \dots, x_n}$ est dégénéré si $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.
- Si $P_{x_1, \dots, x_n}$ est non dégénéré, on dit qu'il est orienté positivement s'il existe $X_i : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continues telles que $(X_i(t))_{1 \le i \le n}$ forme une base de $\mathbb{R}^n$ pour tout $t \in [0,1]$, $X_i(0) = e_i$ et $X_i(1) = x_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On définit alors $O(P_{x_1, \dots, x_n}) = +1$. Sinon $P_{x_1,\dots,x_n}$ est orienté négativement et $O(P_{x_1,\dots,x_n}) = -1$.

- Si p est la projection de x_1 sur $\mathrm{vect}(x_2,\dots,x_n)$, le volume de $P_{x_1,\dots,x_n}$ est défini par : $\mathrm{vol}(P_{x_1,\dots,x_n}) = \mathrm{vol}(P_{x_2,\dots,x_n}) \times \|x_1 - p\|$
- Le volume signé de P est donné par : $S(P) = O(P)\,\mathrm{vol}(P)$ base attitude

Prop 37 : L'application $(x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n \mapsto S(P_{x_1,\dots,x_n})$ est une forme n-linéaire alternée

Prop 38 : $S(P_{x_1,\dots,x_n}) = \det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n)$

Prop 39 : (Inégalité de Hadamard) $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. $\forall x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}^n$, $|\det_{(e_1,\dots,e_n)}(x_1,\dots,x_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$

Prop 40 : Soient $U, V \subset \mathbb{R}^n$ deux ouverts et $\varphi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme. Alors si $f : V \to \mathbb{K}$ est mesurable, f intégrable sur V ssi $f\circ\varphi\,|\det J\varphi|$ est intégrable sur U et dans ce cas :

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f\circ\varphi(x)\,|\det J\varphi(x)|\,dx.$$

IV | Calcul de déterminants

1) Algorithme

Remarque 41 : Utiliser la formule de Leibniz ou en développant par ligne/colonne, cela prendrait $O(n!)$.

Méthode de calcul 42 : La méthode du pivot de Gauss permet, en effectuant des opérations élémentaires sur $M \in M_n(\mathbb{K})$, de se ramener à une matrice T triangulaire. Le déterminant de M se déduit de celui de T en le multipliant par -1 pour chaque transposition de ligne effectuée et par λ^{-1} pour chaque dilatation de colonne de rapport λ.

$\to$ Temps de calcul $O(n^3)$.

2) Déterminants remarquables

Déf-Prop 43 : $n \geq 2$, $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$. On note $V(a_1,\dots,a_n)$ le déterminant de Vandermonde de $a_1,\dots,a_n$:

$$V(a_1,\dots,a_n) := \det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On a $V(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i)$

Application 44 : (Théorème de Burnside) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ un groupe d'exposant fini. Alors G est fini.

Déf-Prop 45 : $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$ si $i \neq j$. Le déterminant de Cauchy de $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ est :

$C(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = \det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}\right)$ et on a :

$$C(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) = \frac{\prod_{i<j}(a_j - a_i)\prod_{i<j}(b_j - b_i)}{\prod_{i,j}(a_i + b_j)}$$

Remarque 46 : Les mineurs d'une telle matrice sont aussi des déterminants de Cauchy donc il est facile de l'inverser ($A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\mathrm{com}(A)$)

Déf 47 : Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. Soit $x_1,\dots,x_n \in E$. La matrice $(\langle x_i, x_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ est la matrice de Gram de $x_1,\dots,x_n$ et son déterminant est noté $G(x_1,\dots,x_n)$.

Prop 48 : E préhilbertien, V un s.e.v de E muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$. Si $x \in E$, alors

$$d(x,V)^2 = \frac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$$

Application 49 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\varphi : (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^1 (1 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2\,dx$$

admet un minimum μ, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$, et :

$$\mu = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Application 50 : Soit $(\alpha_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ strictement croissante. Alors $\mathrm{vect}_{n\in\mathbb{N}}(x \mapsto x^{\alpha_n})$ est dense dans $(C([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ssi $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\alpha_k}$ diverge.

Réf :

Gourdon, Algèbre

Rouvière, Petit guide du calcul diff.

Francinou, Oraux X-ENS Tome 1 Algèbre

Lax, Linear algebra and its applications

Rombaldi, Algèbre et géométrie.