152

Déterminants. Exemples et applications.

I- Définition et propriétés du déterminant

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

A- Déterminant de n vecteurs

thm 1 : L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

prop 2 : Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, il existe une unique forme n-linéaire alternée $l_{\mathcal{B}}$ sur E^n telle que $l_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

déf 3 : Cette forme n-linéaire alternée est appelée déterminant rapporté à la base $\mathcal{B}$ et notée $\det_{\mathcal{B}}$.

prop 4 : Pour toute famille de n vecteurs de E $(x_1, \dots, x_n)$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\exists! (a_{i,j})_{1\le i\le n} \in \mathbb{K}^n$, $x_j = \sum_{1\le i\le n} a_{i,j} l_i$

et alors $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$

prop 5 : (i) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$:
$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \sum_{\substack{1\le j\le n \\ j\neq i}} \lambda_j x_j, x_{i+1}, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

(ii) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$:
$\det_{\mathcal{B}}(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

prop 6 : (relation de Chasles) : Si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, alors pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:
$\det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

thm 7 : $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

ex 8 : $(1, j)$ est une base de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-ev.

ex 9 : Toute famille $(P_k)_{0\le k\le n}$ de $n+1$ polynômes échelonnés en degré de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

B- Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathrm{End}(E)$.

prop 10 : Il existe un unique scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E, tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,
$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$

déf 11 : Ce scalaire est appelé déterminant de l'endomorphisme u et noté $\det(u)$.

rmq 12 : $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u)$.

rmq 13 : $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$

rmq 14 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $u : x \mapsto \lambda x$ alors $\det(u) = \lambda^n$.

prop 15 : (i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$

(ii) $\forall (u, v) \in (\mathrm{End}(E))^2$, $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$

(iii) $u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et alors : $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.

C- Déterminant d'une matrice carrée

Soit $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

rmq 16 : $x \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mapsto Mx$ est un cas particulier d'endomorphisme.

prop. 17 : (i) $\det(M) = \det({}^tM)$

(ii) Deux matrices semblables ont le même déterminant.

déf 18 : Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on appelle mineur relatif à $m_{i,j}$ le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant dans M la $i$ème ligne et la $j$ième colonne.

déf 19 : On définit la comatrice de $M \in GL_n(\mathbb{K})$ par : $\forall i,j \in [\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{Com}(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$

prop 20 : (formule de Cramer) : Si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, alors :
$M^{-1} = (\det(M))^{-1}\, {}^t\mathrm{Com}(M)$.

II- Méthodes de calcul et exemples

A- Développement d'un déterminant

Soit $M = (m_{i,j})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>thm 21</u>: $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

(i) $\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ (suivant une colonne)

(ii) $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ (suivant une ligne)

<u>ex 22</u>: Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{K}^4$. $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc$.

<u>ex 23</u>: (règle de Sarrus) : Soit $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, $A = \begin{vmatrix} a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$

Alors $\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd$

<u>ex 24</u>: Si M est triangulaire ou diagonale, $\det(M) = \prod_{i=1}^{n} m_{i,i}$

B- Algorithme de Gauss

Il permet de calculer le déterminant d'une matrice en le ramenant à celui d'une matrice triangulaire.

C- Exemples de déterminant

DEV.1

<u>prop 25</u>: (Vandermonde) $\forall (x_1,\dots,x_n)\in E^n$,

$$V_n(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

<u>prop 26</u> : (Cauchy) : Soient $(a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)\in(E^n)^2$ tels que pour tout (i,j), $a_i+b_j\neq 0$. $\Delta_n := \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2}&\cdots&\frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$

et $\Delta_n = \dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)\prod_{i<j}(b_j-b_i)}{\prod_{i,j}(a_i+b_j)}$

<u>prop 27</u> (Smith) : Soit $A = (\mathrm{pgcd}(i,j))_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

III- Le déterminant en algèbre linéaire

A- Système linéaire

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

<u>prop 28</u>: Le système linéaire d'inconnue $X\in\mathbb{K}^n$ $MX = Y$, $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une unique solution si et seulement si $\det(M)\neq 0$. On dit que le système est de Cramer et alors $X = M^{-1}Y = \det(M)^{-1}\,{}^t\mathrm{Com}(M)Y$.

B- Polynôme caractéristique

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

<u>déf 29</u>: Le déterminant de $M - XI_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X])$ est un polynôme, appelé polynôme caractéristique et noté χ_M.

<u>prop 30</u>: Si $u\in\mathrm{End}(E)$, alors son polynôme caractéristique χ_u est celui de toute matrice représentant u.

<u>thm 31</u>: χ_M est de degré n et :

$\chi_M(X) = (-1)^n[X^n - \mathrm{tr}(M)X^{n-1} + \dots + (-1)^n\det(M)]$

<u>prop 32</u>: $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre de M si et seulement si c'est une racine de χ_M.

<u>déf 33</u>: À tout $P\in\mathbb{K}[X]$ unitaire, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1}+\dots+a_0$, on associe sa matrice compagnon $C_P = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$

<u>prop 34</u>: $\chi_{C_P}(X) = (-1)^n P(X)$

C- Théorie du rang

Soient $(x_1,\dots,x_r)\in E^r$ $(r\le n)$, $M = (x_1|\cdots|x_r)$ la matrice dont les colonnes sont les composantes de $x_1,\dots,x_r$ dans une base $\mathcal{B}$ de E.

<u>thm 35</u>: $\{x_1,\dots,x_r\}$ est libre si et seulement si on peut extraire de M un mineur d'ordre r non-nul.

<u>déf 36</u>: Soit Δ un mineur d'ordre r extrait de M. On appelle bordant de Δ tout mineur d'ordre $r+1$ extrait de M dont Δ est un déterminant extrait.

<u>thm 37</u>: Soit Δ un mineur d'ordre r non-nul extrait de M. Pour que $w\in E$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_r)$, il faut et il suffit que tous les bordants de Δ dans $A = (x_1|\cdots|x_r|w)$ soient nuls.

<u>thm 38</u>: Soit $B\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})\setminus\{0\}$. Le rang de B est l'ordre maximal des mineurs non-nuls extraits de B.

D- Résultant

Soient $P\in \mathbb{K}_n[X]$, $Q\in\mathbb{K}_m[X]$.

déf 39: On appelle résultant de P et Q, et on note $Res(P,Q)$, le déterminant de la matrice dans la base canonique de:
$\phi : \mathbb{K}_{m-1}[X]\times\mathbb{K}_{n-1}[X]\to\mathbb{K}_{n+m-1}[X]$, $(U,V)\mapsto UP+VQ$.

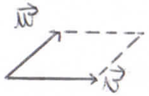
prop 40: $Res(P,Q)=0 \Leftrightarrow$ P et Q ont une racine commune dans $\mathbb{K}$.

coro 41: $Res(P,P')=0\Leftrightarrow$ P a une racine double dans $\mathbb{K}$.

IV - Le déterminant en géométrie et en analyse.

A- Interprétation géométrique

dans $\mathbb{R}^2$:



thm 42: En dimension 2, l'aire $\mathcal{A}(v,w)$ du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donnée par $\mathcal{A}(v,w)=|\det(v,w)|$.

thm 43: Soient $(v_1,\dots,v_n)\in(\mathbb{R}^n)^n$. Le volume $V(v_1,\dots,v_n)$ du parallélépipède engendré par $v_1,\dots,v_n$ est donné par:
$Vol(v_1,\dots,v_n)=|\det(v_1,\dots,v_n)|$.

déf 44: Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{B}$ est orientée positivement si $\det(e_1,\dots,e_n)>0$. Sinon, on dit que $\mathcal{B}$ est orientée négativement.

B- Géométrie élémentaire dans $\mathbb{R}^2$

prop 45: Les 3 points de coordonnées (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) sont alignés ssi $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0$.

prop 46: Soient $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$ 3 points différents de $(0,0)$. Alors les 3 droites d'équations $D_i : a_ix+b_iy=c_i$ pour $i\in\{1,2,3\}$ sont concourantes ou parallèles ssi $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0$

C- Distance

déf 47: Soient $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien et $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. On appelle déterminant de Gram: $G(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}(x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n)\\ \vdots & & & \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n)\end{vmatrix}$

thm 48: Soit E un espace préhilbertien, F un sous-espace de E muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$, $x\in E$. Alors la distance d de x à F vérifie: $d^2=\dfrac{G(x,e_1,\dots,e_n)}{G(e_1,\dots,e_n)}$

DEV. 2

application 49: Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(a_1,\dots,a_n)\mapsto\int_0^1(1+a_1x+\dots+a_nx^n)^2dx$. Alors φ admet un minimum μ, $\mu=\dfrac{G(1,x,\dots,x^n)}{G(x,\dots,x^n)}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$, atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$.

D- Application à l'analyse

prop 50: L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$, $M\mapsto\det(M)$ est polynomiale homogène de degré n. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

prop 51: La différentielle de det au point $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est donnée par: $\forall H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $D\det_M(H)=Tr({}^t Com(M)H)$

thm 52: (Cayley-Hamilton): $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M(M)=0$.

thm 53: (changement de variable): Soient U et V deux ouverts non-vides de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U\to V$ un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour toute fonction $f: V\to\mathbb{R}_+$ mesurable positive,
$$\int_V f(t)\,d\lambda_N(t)=\int_U f(\varphi(x))\,|\det(J_\varphi(x))|\,d\lambda_N(x)$$
avec $J_\varphi(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(x)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}(x)\end{pmatrix}$, où $\varphi: x=(x_1,\dots,x_n)\mapsto(\varphi_1(x),\dots,\varphi_n(x))$

Références: - Algèbre linéaire, Henri Roudier
- Gourdon, Les maths en tête Algèbre
- Oraux X-ENS Algèbre 2, Francinou Gianella Nicolas
- Algèbre linéaire, Joseph Grifone