153

124

Polynômes d'Endomorphisme en dim finie. Applications à la Réduction d'endomorphismes en dim finie

Dans toute la leçon, on considère un corps $\mathbb{k}$ (parfois $\mathbb{k} \subset \mathbb{C}$), E un $\mathbb{k}$-ev de dimension $N < +\infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Polynôme minimal, polynôme caractéristique

1) Algèbre $\mathbb{k}[u]$

Soit $\Phi : \mathbb{k}[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$, on note $\mathbb{k}[u] := \operatorname{Im} \Phi$

et π_u l'unique générateur unitaire de $\operatorname{Ker} \Phi$ ($\mathbb{k}[X]$ principal)

Définition 1 : π_u est appelé polynôme minimal de u.
$\pi_u | P$: P est appelé polynôme annulateur de u : $P(u) = 0$

Propriétés 2 $\mathbb{k}[u] \simeq \mathbb{k}[X]/_{\langle \pi_u \rangle}$ est une $\mathbb{k}$-algèbre commutative de dimension $\deg \pi_u$.

Proposition 3 Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $v \circ u = u \circ v$, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u

→ Vrai en particulier pour $\mathbb{k}[u]$.

Théorème 4 (Lemme des Noyaux)

- Soit $P = Q_1 \cdots Q_r$ annulateur de u, Q_i premiers entre eux 2 à 2. Soit $N_i := \operatorname{Ker} Q_i(u)$. Alors $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$
- Soit p_i projecteur sur N_i dans cette décomposition : $p_i \in \mathbb{k}[u]$

2) Polynôme caractéristique

Définition 5 (Éléments propres)

- λ valeur propre si $\exists x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda x$. On note E_λ le sous-espace propre associé = ensemble des vecteurs propres de u pour λ.
- On note $Sp(u)$ ou $Sp_{\mathbb{k}}(u) = \{\lambda \text{ vap}\}$ le Spectre de u

Propriétés 6 : λ vap $\Leftrightarrow$ $\det(u - \lambda \, id) = 0$: $E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda \, id)$.

Définition 7 (Polynôme caractéristique)

$\chi_u := \det(u - X . id_E) \in \mathbb{k}[X]$. Alors λ vap $\Leftrightarrow \chi_u(\lambda) = 0$

Exemples 8 projecteurs : $p^2 = p \Rightarrow \pi_p = X(X-1)$, $\chi_p = X^k (X-1)^{N-k}$ où $k = \dim \operatorname{Ker} p$.

symétries : $\pi_s = X^2 - 1$, $\chi_s = (X+1)^k (X-1)^{N-k}$

nilpotents : $u^a = 0 \neq u^{a-1} \Leftrightarrow \pi_u = X^a$, $\chi_u = X^N$

→ $\deg \chi_u = N$ → $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$, on définit de même π_A et χ_A

Proposition 9 • Si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ alors $\pi_u = \pi_A$, $\chi_u = \chi_A$
• Si $u \sim v$, $\pi_u = \pi_v$, $\chi_u = \chi_v$. Si $A = PBP^{-1}$, $\pi_A = \pi_B$, $\chi_A = \chi_B$

Proposition 10 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$.

$\chi_A = (-1)^N X^N - \operatorname{tr} A X^{N-1} + \dots + (-1)^{N-k} \beta_{N-k} X^k + \dots + (-1)^N \det A$

où β_i est la somme des mineurs principaux de taille i.

→ $\chi_A = \chi_{{}^tA}$.

Théorème 11 (Théorème de Cayley-Hamilton)

$\chi_u(u) = 0$ soit $\pi_u | \chi_u$.

→ On a déjà plusieurs façons de le prouver (comatrice, Lemme des Noyaux) et d'autres suivront.

→ On en déduit que $Sp_u = \{\text{racines de } \pi_u\}$.

Définition 12 (Sous-espace caractéristique) $[\mathbb{k} \subset \mathbb{C}]$

Soit $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$, $\lambda_i \in Sp_{\mathbb{C}}(u)$. (ou χ_u scindé)

$N_{\lambda_i} := \operatorname{Ker}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ est appelé ss-espace caractéristique associé à λ_i

→ On décomposera souvent $E = \bigoplus_{i=1}^{r} N_i$ (Cayley-Hamilton).

II - Polynômes et Réduction

1) Trigonalisation. Diagonalisation

Définition 13 (Trigonalisable, Diagonalisable). $A \in \mathcal{M}_n(k)$.
- A trigonalisable si A semblable à une matrice triangulaire sup.
- A diagonalisable si A semblable à une matrice diagonale

$\to$ u diago $\Leftrightarrow \exists$ base de vep de E.

Théorème 14 (Critères)

u trigonalisable $\Leftrightarrow \Pi_u$ scindé $\Leftrightarrow \chi_u$ scindé

u diago $\Leftrightarrow \Pi_u$ scindé racines simples
$\Leftrightarrow \chi_u$ scindé et $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim N_{\lambda_i} = \alpha_i$

Exemple 15 : projecteurs : Π_p scindé rac. simples $\Rightarrow$ diago

symétries ($car(k) \neq 2$) : idem. Pour $M \mapsto {}^tM$ sur $\mathcal{M}_n(k)$,
$N_1 = \mathcal{S}_n(k)$, $N_{-1} = \mathcal{A}_n(k)$. • $[k \subset \mathbb{C}]$: C-H !

Proposition 16 (Codiagonalisation, cotrigonalisation).

Si u et v commutent et sont diago(trigo)nalisables, on peut les diago(trigo)naliser dans une même base.
Alors $u+v$ et uv ~~sont~~ diago(trigo)nalisables

$\to P \in k[X]$. $P(\varphi^{-1} \circ u \circ \varphi) = \varphi^{-1} \circ P(u) \circ \varphi$

2) Décomposition de Dunford

Exemple 17 : u nilpotent indice $\alpha \Leftrightarrow \Pi_u = X^\alpha \Leftrightarrow \chi_u = X^N \Leftrightarrow$ u trigo et $Sp(u) = \{0\} \Leftrightarrow \exists \mathcal{B}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}$

Définition 18 (Endomorphisme Semi-simple)

u est dit semi-simple si
F sev u-stable $\Rightarrow \exists$ G u-stable, $E = F \oplus G$

Théorème 18 (Caractérisation des Semi-simples) $\Pi_u = \prod Q_i^{\alpha_i}$

u Semi-simple $\Leftrightarrow \Pi_u$ sans facteur carré ($\forall i, \alpha_i = 1$).
$\Leftrightarrow [k \subset \mathbb{C}]$ u diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Corollaire 19 u semi-simple + nilpotent $\Leftrightarrow u = 0$.

Théorème 20 (Décomposition de Dunford)

On suppose χ_u scindé. Alors il existe $d, n \in \mathcal{L}(E)$ d diagonalisable et n nilpotent tels que.
• $u = d + n$ • $d \circ n = n \circ d$
De plus, $d, n \in k[u]$.

Corollaire 21 (Dunford Généralisé) $[k \subset \mathbb{C}]$.

$\exists s, n \in \mathcal{L}(E)$, s Semi-simple, n nilpotent,
$u = s + n$ et $s \circ n = n \circ s$. $s, n \in k[u]$

Corollaire 22 u diagonalisable $\Leftrightarrow$ exp u diagonalisable.
$[k \subset \mathbb{C}]$.

III - Invariants de Similitude

Soit $\varphi : k[X] \to E$ $\quad P \mapsto P(u)(x)$. On note $E_x := \operatorname{Im} \varphi$

et Π_x l'unique générateur unitaire de $\ker \varphi$.

Définition 23 : Π_x est appelé polynôme minimal de l'élément x
E_x est appelé sous-espace cyclique engendré par x.

Propriétés 24 • $\Pi_x \mid \Pi_u$ • E_x sev u-stable de dimension $\deg \Pi_x$.
(C-H !!)

Théorème 25 $[\exists x \in E, \Pi_x = \Pi_u]$

DEV. 1
(Objectif Agreg p325)

DEV 2
(Gourdon)
(Méthode de Newton pour les plus à l'aise)

OA p165

DEV 3 (Gourdon)

Définition 26 (Endomorphisme cyclique)
u est dit cyclique si $\exists x \in E$, $E_x = E$
→ $(x, u(x), \dots, u^{N-1}(x))$ base de E.

Définition 27 (Matrice Compagnon).
$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$, on définit $C_P := \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

Propriété 28 : $\pi_{C_P} = (-1)^n \chi_{C_P} = P$

Proposition 29 (Caractérisation des cycliques)
u cyclique $\iff (-1)^N \chi_u = \pi_u \iff \dim k[u] = n \iff k[u] = \{v \in \mathcal{L}(E), vu = uv\}$
$\iff \exists \mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice compagnon

Théorème 30 (Décomposition de Frobénius).
$\exists!\ P_s | \dots | P_1 \in k[X]$, $\exists\ E = \bigoplus_{i=1}^{s} F_i$ tels que.
- $u_{|F_i}$ est cyclique
- $\pi_{u_{|F_i}} = P_i$

→ Dans une base adaptée la matrice de u est $\begin{bmatrix} C_{P_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_{P_s} \end{bmatrix}$
→ Polynômes unitaires non constants !!
→ $s = N \iff u$ est une homothétie.

Définition 31 (Invariants de Similitude)
Les polynômes $P_1, \dots, P_s$ sont appelés invariants de similitude de u.

Corollaire 32 Les invariants de similitude caractérisent la classe de similitude de u.
- $E \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} k[X]/(P_i)$
- $\pi_u = P_1$
- $\chi_u = \widetilde{\prod_{i=1}^{s}} P_i$ $= \chi(-u)$
- En dimension 2 ou 3, π_u et χ_u suffisent pour caractériser la classe d'équivalence

→ Lien avec la décomposition des Groupes Abéliens Finis !!

Contre-Exemple 33 : $A = \begin{bmatrix} 0\,0 & 0 \\ 1\,0 & \\ 0 & 0\,0 \\ & 1\,0 \end{bmatrix}$: Invariants $X^2 | X^2$, $\pi_A = X^2$, $\chi_A = X^4$.

$B = \begin{bmatrix} 0\,0 & 0 \\ 1\,0 & \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Invariants $X | X | X^2$, $\pi_B = X^2$, $\chi_B = X^4$.

Application 34 : Toute matrice est semblable à sa transposée.

Définition 35 (Matrice de Jordan élémentaire).
On définit $J_n := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(k)$

Propriétés 36
- u est cyclique + nilpotent $\iff$ sa matrice dans une base est J_N
- u est cyclique et diagonalisable $\iff$ Card$(Sp(u)) = N$
$\iff \chi_u$ est scindé à racines simples

Théorème 37 (Décomposition de Jordan)
On suppose χ_u scindé. Alors, dans une base adaptée, la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $J_{\lambda,n} = \lambda I_n + J_n$. Cette décomposition est unique et caractérise la classe de similitude de u.

Application 38 $[k \subset \mathbb{C}]$. A et B semblables sur k $\iff$ A et B semblables sur $\mathbb{C}$
→ Frobénius ou Jordan.

REFERENCES

- Gourdon. Algèbre [GOU]
- Beck, Malick, Peyré. Objectif Agrégation [BMP] ou [OA]