153

Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction en dimension finie. Exemples et applications.

Dans toute la suite, K désigne un corps commutatif, E un K-espace vectoriel de dimension finie sur K égale à $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{L}(E)$ le K-espace vectoriel des endomorphismes de E. Si $P \in K[X]$, on note $\tilde{P} : K \longrightarrow K$ sa fonction polynômiale associée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ fixé.

I - Polynôme d'endomorphisme

1) Généralités

Déf 1 : Soient $m \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_m \in K$, $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in K[X]$. On pose $P(u) = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k$, avec la convention $u^0 = Id_E$.
On dit que l'endomorphisme $P(u)$ de E est un polynôme en l'endomorphisme u de E.

Déf 2 : On appelle algèbre des polynômes en u, notée $K[u]$, l'ensemble $\varphi_u(K[X])$ où φ_u désigne l'application $\varphi_u : K[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \longmapsto P(u)$.

Prop 1 : L'application φ_u est un morphisme de K-algèbres et $K[u]$ est une K-algèbre commutative.

Prop 2 : Les K-espaces vectoriels $Ker(P(u))$ et $Im(P(u))$ sont stables par u.

Thm 1 (Lemme des noyaux) : Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_m$ des éléments de $K[X]$ deux à deux premiers entre eux, $P = P_1 \dots P_m$. On a $Ker\, P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker(P_i(u))$. Si $P(u) = 0$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker(P_i(u))$ et les projecteurs associés sont dans $K[u]$.

Applications : ($Car(K) \neq 2$) $*_1$) Si p est un projecteur de E, $E = Ker(p) \oplus Ker(p - Id_E)$. $*_2$) Si s est une symétrie de E, $E = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p + Id_E)$.

2) Polynôme minimal - Structure de $K[u]$

a) Polynôme minimal, rudiments

Déf 3 : On appelle polynôme annulateur de u, tout $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$.

Prop 3 : Il existe un unique $\Pi_u \in K[X]$, unitaire tel que $Ker\, \varphi_u = \{P \in K[X] / P(u) = 0\} = (\Pi_u) = \Pi_u K[X]$.

Déf 4 : On dit que $Ker\, \varphi_u$ est l'idéal (de $K[X]$) des polynômes annulateurs de u. On appelle Π_u le polynôme minimal de u.

Exemples : $*_1$) $\lambda \in K^*$, $u = \lambda Id_E$, $\Pi_u = X - \lambda$. $*_2$) u nilpotent d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_u = X^k$. $*_3$) $u^2 = u$ et $u \notin \{0, Id_E\}$, $\Pi_u = X(X-1)$. $*_4$) $u^2 = Id_E$ et $u \notin \{-Id_E, Id_E\}$, $\Pi_u = (X-1)(X+1)$.

Prop 4 : Deux endomorphismes conjugués de E ont même polynôme minimal.

Rem 1 : $v \in \mathcal{L}(E)$, en général $\Pi_{u \circ v} \neq \Pi_{v \circ u}$.

b) Polynôme minimal et restrictions

Prop 5 : Si F est un sous-espace vectoriel de E, stable par u, alors $\Pi_{u_F} | \Pi_u$.

Prop 6 : Soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E, stables par u tels que $E = F_1 \oplus F_2$. On a $\Pi_u = p.p.c.m.(\Pi_{u_{F_1}}, \Pi_{u_{F_2}})$.

Rem 2 : Si $\Pi_{u_{F_1}}$ et $\Pi_{u_{F_2}}$ sont premiers entre eux, on a $\Pi_u = \Pi_{u_{F_1}} \Pi_{u_{F_2}}$.

c) Résultats sur $K[u]$

Thm 2 : Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_m \in K[X]$ deux à deux premiers entre eux, $\Pi_u = P_1 \dots P_m$. On a :
$$K[u] \overset{K\text{-alg}}{\simeq} K[X]/(\Pi_u) \overset{K\text{-alg}}{\simeq} (K[X]/(P_1)) \times \dots \times (K[X]/(P_m)).$$

Application : Etude des idempotents de $K[u]$.

Prop 7 : La K-algèbre $K[u]$ est de K-dimension finie égale à $d = \deg \Pi_u$. Une K-base de $K[u]$ est $(Id_E, u, \dots, u^{d-1})$.

Prop 8 : Sont équivalentes : i) $K[u]$ est un corps ; ii) $K[u]$ est un anneau intègre ; iii) Π_u est irréductible dans $K[X]$.

3) Polynôme caractéristique et valeurs propres

a) Valeurs propres

Prop 9 : Ont lieu : i) Les valeurs propres de u sont incluses dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur de u ; ii) Les valeurs propres de u sont les racines de Π_u.

Exemple : $*_1$) 0 est l'unique valeur propre d'un endomorphisme de E nilpotent. $*_2$) Les valeurs propres d'un projecteur de E distinct de 0 et Id_E sont 0 et 1.

Prop 10 : Si $\lambda \in K$ est une valeur propre de u, alors pour tout $P \in K[X]$, $\tilde{P}(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) \subset \mathrm{Ker}(P(u) - \tilde{P}(\lambda) Id_E)$.

b) Polynôme caractéristique

Déf 5 : On appelle polynôme caractéristique de u, $\chi_u = \det(u - X Id_E)$.

Prop 11 : Pour tout $\lambda \in K$, sont équivalentes : i) λ est racine de χ_u ; ii) $u - \lambda Id_E$ est non injectif ; iii) λ est valeur propre de u.

Application : $*_1$) Un projecteur de E, distinct de Id_E n'est jamais injectif. $*_2$) Un endomorphisme nilpotent de E n'est jamais injectif.

Prop 12 : On a : i) $\deg \chi_u = n$; ii) Deux endomorphismes conjugués de E ont même polynôme caractéristique ; iii) Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_{u \circ v} = \chi_{v \circ u}$.

Thm 3 (Cayley-Hamilton) : On a $\chi_u(u) = 0$.

Rem 3 : C'est équivalent à $\Pi_u \mid \chi_u$.

Application : Si $\tilde{\chi}_u(0) \neq 0$, $u \in GL(E)$ et $u^{-1} \in K[u]$.

II – Réduction en dim avec les polynômes d'endomorphismes

1) Critères de diagonalisabilité

Thm 4 : Sont équivalentes : i) u est diagonalisable ; ii) Il existe $P \in K[X]$, scindé dans $K[X]$, à racines simples tel que $P(u) = 0$; iii) Π_u est scindé dans $K[X]$, à racines simples ; iv) χ_u est scindé dans $K[X]$ et pour toute valeur propre de u, la dimension sur K de $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$ est égale à la multiplicité de λ dans χ_u.

Applications : $*_1$) K corps fini à q éléments ($q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$) u est diagonalisable ssi $X^q - X$ annule u.
$*_2$) Théorème de Burnside : $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Alors, G est fini ssi G est d'exposant fini. } DVPT 1

2) Critères de trigonalisabilité

Thm 5 : Sont équivalentes : i) u est trigonalisable ; ii) Il existe $P \in K[X]$, scindé dans $K[X]$ tel que $P(u) = 0$; iii) Π_u est scindé dans $K[X]$; iv) χ_u est scindé dans $K[X]$.

Application : $n \in \mathbb{N}^*$, $M \in M_n(\mathbb{C})$. La matrice M est trigonalisable. Ceci est encore vrai avec tout corps algébriquement clos.

3) Décompositions de Dunford

Thm 6 : Si χ_u est scindé dans $K[X]$, il existe un unique $(n, d) \in \mathcal{L}(E)$ tel que : i) $u = n + d$; ii) $n \circ d = d \circ n$; iii) n est nilpotent ; iv) d est diagonalisable. De plus, $n, d \in K[u]$. } DVPT 2

Application : Calculs d'exponentielles, voir III

Thm 7 (Dunford multiplicatif) : Si $u \in GL(E)$, si χ_u est scindé sur K, il existe un unique $(v,d) \in \mathcal{L}(E)$ tel que : i) $u = v \circ d$; ii) $v \circ d = d \circ v$; iii) v est unipotent ; iv) d est diagonalisable. De plus, $v, d \in K[u]$.

Application : $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in GL_n(\mathbb{C})$, s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p est diagonalisable, alors u est diagonalisable.

4) Réduction de Frobenius

Déf 6 : Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in K$, $P = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. On appelle matrice compagnon de P, la matrice

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Thm 7 : Il existe $r \in \mathbb{N}^*$, β une K base de E, $P_1, \dots, P_r \in K[X]$ tels que $P_r | P_{r-1} | \dots | P_1$ et

$$Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

$(P_i)_{1 \le i \le r}$ est de plus unique.

Déf 7 : On dit que $(P_i)_{1 \le i \le r}$ est la suite des invariants de similitude de u.

Applications : $*_1$) Deux endomorphismes de E sont conjugués ssi ils ont les mêmes invariants de similitude. $*_2$) Une matrice de $M_n(K)$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est semblable à sa transposée. $*_3$) $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in M_n(K)$, L une extension du corps K. Si A et B sont semblables dans $M_n(L)$, elles le sont dans $M_n(K)$.

III – Applications

1) Calculs de puissances

a) Méthode de division euclidienne

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ fixé, $P \in K[X] \setminus \{0\}$ tel que $P(u) = 0$. Il existe un unique $(Q, R) \in (K[X])^2$ tel que $\deg R < \deg P$ et $X^k = PQ + R$. On a $u^k = R(u)$. Il suffit donc de connaître les premières puissances de u.

Rem 4 : On peut également tenter de réduire (diagonaliser) l'endomorphisme pour le calcul de ses puissances.

b) Suites récurrentes linéaires

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in K^p$. On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de K définie par : $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in K^p$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{n+i}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ a_0 & \cdots & & & a_{p-1} \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Ainsi, déterminer $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ revient à déterminer les puissances de A.

2) Exponentielle d'endomorphisme ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

a) Définition

Prop 13 : La série $\sum \frac{1}{k!} u^k$ converge normalement dans $\mathcal{L}(E)$. Sa somme, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k \in K[u]$.

Déf : On appelle exponentielle de u, l'endomorphisme de E $\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} u^k$.

b) Calculs avec Dunford

Si (n, d) désigne la décomposition de Dunford de u, on a : $\exp(u) = \exp(n+d) = \exp(n) \circ \exp(d)$. Les puissances de n et d sont plus simples à obtenir.

c) Utilisation de l'exponentielle

Prop 14 : $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(K)$. Les solutions de $Y' = AY$ sont les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto e^{tA} V$ avec $V \in K^n$.

Références :

*1) Objectif agrégation ; BECK

*2) Oraux X E.N.S. Algèbre 2 ; FRANCINOU

*3) Algèbre ; GOURDON

*4) Analyse ; GOURDON

*5) Algèbre et Géométrie M.P. ; MONIER