Prérequis : Notions élémentaires de réduction : valeurs propres, spectre, espace propre, espace caractéristique, définition de la diagonalisabilité et de la trigonalisabilité, et de la relation de similitude.

Dans tout ce qui suit, $K$ est un corps commutatif, $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n < +\infty$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

# I Polynômes d'endomorphisme :

## 1) L'algèbre $K[u]$, le polynôme minimal de $u$ :

[GOU] p 174

**déf** : Si $P = \sum_{i=1}^{p} a_i X^i \in K[X]$,
pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $P(u) = a_0 Id + a_1 u + \dots + a_p u^p \in \mathcal{L}(E)$
pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on note $P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_p A^p \in \mathcal{M}_n(K)$

**déf** : On définit $\phi : K[X] \to \mathcal{L}(E)$ morphisme d'algèbre.
$$P \mapsto P(u)$$

[COG] p 271

Son noyau est un idéal non nul, nommé l'idéal des polynômes annulateurs de $u$, il est engendré par un unique polynôme unitaire, on l'appelle le polynôme minimal de $u$ et on le note $\pi_u$.

**rq** : Pour $P \in K[X]$, $P(u) = 0 \iff \pi_u \mid P$

**ex** :
- $u$ nilpotente d'indice $r \longrightarrow \pi_u = X^r$
- $u$ projecteur $\neq Id, \neq 0 \longrightarrow \pi_u = X^2 - X$
- $u$ symétrie $\neq \pm Id \longrightarrow \pi_u = (X-1)(X+1)$

[O-A] p 161

**déf** : On définit l'algèbre des polynômes en $u$, que l'on note $K[u]$, par $K[u] := \operatorname{Im} \phi = \{P(u), P \in K[X]\}$

[COG] p 272

**prop** (Structure et dimension de $K[u]$)
$K[u]$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$, de dimension $\deg(\pi_u)$, dont la famille $(Id, u, \dots, u^{\deg(\pi_u)-1})$ constitue une base.

**rq** : $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $u$.

[COG] ~~273~~ 274

**déf** Pour $A \in M_n(K)$, on définit de la même façon $\pi_A$.

**prop** : Si $A = Mat_B\, u$, alors $\pi_A = \pi_u$. Par conséquent, deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

[COG] p 278

**prop** : (Polynôme minimal et restriction)
Si $E = F \oplus G$, alors $\pi_u = ppcm(\pi_{u|F}, \pi_{u|G})$
(avec $F$ et $G$ stable par $u$)

**ex** : Les matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas semblables $(\pi_A = (X-1)^2(X-2), \pi_B = (X-1)(X-2))$

Les deux propositions qui suivent établissent un premier lien avec la réduction :

[GOU] p ~~177~~ 174

**prop** : Pour $P \in K[X]$, si $P(u) = 0$, les valeurs propres de $u$ sont des racines de $P$.

[GOU] p 176

**prop** : Les valeurs propres de $u$ sont exactement les racines de $\pi_u$.

2) Lemme de décomposition des noyaux

[GOU] p 175

**Th** (Lemme de décomposition des noyaux)
Si $P = P_1 \dots P_r$, avec les $P_i$ premiers entre eux deux à deux, alors $\ker P(u) = \bigoplus \ker P_i(u)$

**ex** : • $u$ projecteur non trivial $\rightarrow E = \ker u \oplus \ker(u - Id)$
• $u$ symétrie non triviale $\rightarrow E = \ker(u - Id) \oplus \ker(u + Id)$

3) Polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton.

[COG] p 284

**def** : Pour $A \in M_n(K)$, on pose $\chi_A = \det(XI_n - A)$

**prop** : Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
Ceci permet de définir le polynôme caractéristique de $u$ comme celui de sa matrice dans n'importe quelle base.

**ex** : • $u$ nilpotent $\rightarrow \chi_u = X^n$
• $u$ projecteur $\rightarrow \chi_u = X^p (X-1)^{n-p}$, où $p = \dim \ker u$

[COG] p 284

**prop** : Les racines de $\chi_u$ sont exactement les valeurs propres de $u$.

**Application** : Si $K$ est algébriquement clos ($K = \mathbb{C}$), $Sp\, u \neq \emptyset$.

[COG] p 287

**prop** (Polynôme caractéristique et restriction)
Soit $F$ sous espace stable par $u$, alors $\chi_{u|_F} \mid \chi_u$.

[COG] p 290

**Application** : Si $\alpha_\lambda$ est la multiplicité de $\lambda$ dans $\chi_u$, alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq \alpha_\lambda$

[GOU] p 176

**Th** (Cayley-Hamilton) $\chi_u(u) = 0$.

**rq** : • $\Pi_u \mid \chi_u$
• $\deg(\Pi_u) \leq n$

[GOU] p 178

**Application** : $u$ nilpotent $\Leftrightarrow Sp\, u = \{0\} \Leftrightarrow \chi_u = X^n$

II Les polynômes d'endomorphisme : un outil pour la réduction

1) Application à la diagonalisation

[OA] p 165

**Th** (Critère de diagonalisabilité)
Sont équivalents : i) $u$ est diagonalisable
ii) $\Pi_u$ est scindé à racines simples.
iii) Il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples.

[OA] p 165

**conséquence** : • Les projecteurs sont diagonalisables
• En caractéristique $\neq 2$, les symétries sont diagonalisables.
↳ $A \mapsto {}^tA$ est diagonalisable.

[OA] p 166

**Application** : • Si $K = \mathbb{F}_q$, $u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow u^q - u = 0$
• Une restriction d'endomorphisme diagonalisable est toujours diagonalisable.
• $A \in GL_n(\mathbb{C})$ d'ordre fini est diagonalisable.

2) Application à la trigonalisation :

[OA] p 166

**Th** (Critère de trigonalisation)
Sont équivalents : i) $u$ est trigonalisable.
ii) ~~$\chi_u$ est scindé~~
ii) $\Pi_u$ est scindé.
iii) Il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé.

**Application** : • Si $K$ est algébriquement clos, $u$ est trigonalisable.
• Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp \mathrm{tr}(A) = \det \exp A$.
• Le caractère "trigonalisable" résiste à la restriction.

### 3) La décomposition de Jordan - Dunford :

DVP [GOU] p 135

**Th** (Décomposition de Jordan - Dunford)
Soit $A \in M_n(K)$ avec $\chi_A$ scindé. Il existe $D$ et $N \in M_n(K)$ uniques tels que $\begin{cases} A = D+N \\ D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotent} \\ D \text{ et } N \text{ commutent} \end{cases}$

De plus, $D$ et $N$ sont des polynômes en $A$.

[GOU] p 136

**Application** : • calcul de puissance :
$$A^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} N^i D^{k-i}$$
• exponentielle de matrice : $\exp A = \exp D \exp N$.

## III Invariants de similitude :

### 1) Endomorphisme cyclique :

[COG] p 273

**def** : Pour $x \in E$, on pose $\phi_x : K[X] \to E$ linéaire.
$$P \mapsto P(u)(x)$$

On note $E_x$ son image. Son noyau est un idéal non nul, engendré par un unique polynôme unitaire, que l'on note $\Pi_{u,x}$, appelé polynôme minimal de $x$ relativement à $u$.

[COG] p 278

**rq** : • $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$
• Si on note $d = \deg(\Pi_{u,x})$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ est une base de $E_x$.

[COG] p 281

**lemme** : $\exists x \in E \;/\; \Pi_u = \Pi_{u,x}$

[COG] p 230, 2ème édition

**def** : $u$ est cyclique si $\exists x \in E$ tel que $E_x = E$.

**rq** : Cela revient à donner l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ soit une base de $E$.

[OA] p 174, [COG] p 292

**def** (Matrice compagnon)
À $P = \sum_{i=1}^{p} a_i X^i \in K[X]$, on associe $\mathcal{C}_P = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{bmatrix}$.

**prop** : $\chi_{\mathcal{C}_P} = P = \Pi_{\mathcal{C}_P}$

[COG] p 292

**Th** (Caractérisation des endomorphismes cycliques)
Sont équivalents : i) $u$ est cyclique.
ii) $\Pi_u = \chi_u$
iii) Il existe une base $B$ de $E$ telle que $Mat_B\, u$ est compagnon.

### 2) Décomposition de Frobenius :

DVP [GOU] Annexe K3

**Th** (Décomposition de Frobenius)
Il existe $P_1, \dots, P_r$ uniques et une base $B$ tels que $P_r \mid \dots \mid P_1$, et $Mat_B\, f = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{P_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}_{P_r} \end{bmatrix}$.

[GOU] Annexe

**Cor** : Les $P_i$ sont ~~appe~~ appelés invariants de similitude de $u$. Ils caractérisent la classe de similitude de $u$.

[GOU] Annexe

**Application** : • Si $k \subset K$, deux matrices sont semblables sur $k$ ssi elles sont semblables sur $K$.

[COG] 370

• Si $n = 2$ ou $3$, deux matrices sont semblables ssi elles ont même polynôme minimal et même polynôme caractéristique.

[GOU] Annexe

• Une matrice et sa transposée sont toujours semblables.

[GOU] Annexe T p 193.

• (Décomposition de Jordan)
On suppose $\chi_u = \prod (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ scindé sur $K$.
Alors, il existe une base $B$ de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ est constituée de blocs de la forme $\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & \lambda_i \end{bmatrix}$.

[OA] = Objectif Agreg, [GOU] Gourdon, Algèbre (2ème édition), [COG] Cognet, Algèbre linéaire.

Eventuellement, parler du commutant dans le III.

# Développement : Décomposition de Frobenius d'un endomorphisme en dimension finie.

Frédéric Valet

21 septembre 2014

## 1 Prérequis.

Réf : Gourdon, Algèbre, annexe B. Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note :
- $\pi_f$ son polynôme minimal.
- $\mathcal{L}_f := \{P(f) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- Pour $x \in E$, $P_x$ est le polynôme unitaire engendrant l'idéal $\{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$.
- $E_x := \{P(f)(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $k := \deg(\pi_f)$ ; $\mathcal{L}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $k$, avec pour base $(Id_E, f, \cdots, f^{k-1})$.
- $l := \deg(P_x)$ ; $E_x$ est un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $l$, avec pour base $(x, f(x), \cdots, f^{l-1}(x))$.

**Lemme 1** *Il existe $x$ tel que $P_x = \pi_f$.*

Définitions de la cyclicité : il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$ ; $\deg(\pi_f) = n$ ; $\pi_f = (-1)^n \chi_f$. Définition d'une matrice compagnon d'un polynôme $P$ : $C(P)$.

**Lemme 2** *Si $f$ est cyclique c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$, alors il existe une base de $E$ tel que la matrice de $f$ soit $C(\pi_f)$.*

## 2 Théorème de la décomposition.

**Théorème 3** *Soit $f \in \mathcal{L}_E$ ; il existe $(F_1, \cdots, F_r)$ suite de sous-espaces vectoriels de $E$, stables par $f$, telle que :*

1. *$E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_r$,*
2. *$\forall i \in \{1, \cdots, r\}$, $f_i := f_{|F_i}$ est un endomorphisme cyclique de $F_i$.*
3. *Si $P_i$ est le ploynôme minimal de $F_i$ , alors $P_{i+1} | P_i$.*

Les $P_i$ sont les invariants de similitude de l'endomorphisme $f$.

**Remarque 4** *La troisième condition implique que $P_1$ annule $f$ sur chacun des $F_i$, donc par la deuxième condition sur $E$. Ainsi, $P_1$ est un polynôme annulateur. Par définition il est unitaire, et par cyclicité, il est minimal.*

Démonstration

Unicité.
Soient $(F_1, \cdots, F_r)$ et $(G_1, \cdots, G_s)$, deux suites d'espaces différentes à permutation près, vérifiant les conditions du théorème. On note $P_i := \pi_{f_{|F_i}}$ et $Q_i := \pi_{f_{|G_i}}$. D'après la remarque, $P_1 = Q_1$ ; on note donc $j$ le plus petit indice tel que $P_j \neq Q_j$.
Puisque $P_k | P_j$ pour tout $k > j$, on a $P_j(f)(F_k) = 0$. Grâce à la décomposition de $E$, on obtient :

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(F_1) \oplus \cdots \oplus P_j(f)(F_{j-1}).$$

Puisque les $G_i$ sont stables par $f$ :

$$P_j(f)(E) = P_j(f)(G_1) \oplus \cdots \oplus P_j(f)(G_s).$$

Pour tout $i < j$, on a $F_i = G_i$, et par unicité du polynôme minimal de $f_i$ : $P_i = Q_i$. D'où :

$$\dim P_j(f)(F_i) = \dim P_j(f)(G_i).$$

Grâce aux deux décompositions de $P_j(f)(E)$, on obtient une contrainte dimensionnelle :

$$0 = \dim P_j(f)(G_j) + \cdots + \dim P_j(f)(G_s)$$

et $P_j$ est un polynôme annulateur de $f_{|G_j}$, donc $Q_j | P_j$.
On fait de même avec $Q_j$ à la place de $P_j$, et puisqu'ils sont unitaires, $Q_j = P_j$.

Existence.
Soit $x \in E$ tel que $P_x = \pi_f$. Avec $k := \deg \pi_f$, on a une base de $E_x$ :

$$(e_1 = x, e_2 = f(x), \cdots, e_k = f^{k-1}(x)).$$

On choisit de prendre $F_1 = E_x$. Grâce au théorème de la base incomplète, on la complète en une base de $E$ : $(e_1, \cdots, e_n)$. On note la base duale associée $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$. Soit un sous-espace du dual $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \Gamma &:= \left\{ {}^t f^i(e_k^*), i \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ e_k^* \circ f^i, i \in \mathbb{N} \right\} \\ G &:= \Gamma^\circ. \end{aligned}$$

L'ensemble $G$ est l'orthogonal du dual $\Gamma$ il représente l'ensemble des $x \in E$ tel que la $k$ième coordonnée des $f^i(x)$ soit nulle. Par définition, $G$ est stable par $f$, et de plus, c'est un sous-espace vectoriel de $E$. Le but sera de montrer que $E = F \oplus G$.

Soit $y \in F \cap G$ ; il admet une décomposition dans $F$ : $y = a_1 e_1 + \cdots + a_p e_p$, où $p \leq k$ est l'indice de la plus grande coordonnées non nulle. De plus $y \in G$ :

$$\begin{aligned}
y \in G &\leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}\ ,\ e_k^* \circ f^i(y) = 0, \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{j=1}^{p} a_j e_k^* \circ f^i(e_j) = 0, \\
&\Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}\ ,\ \sum_{j=1}^{p} a_j e_k^*(e_{j+i}) = 0, \\
&\Rightarrow \text{ pour } i = k - p, a_p(e_k^*(e_{p+k-p}) = 0. \\
&\Rightarrow a_p = 0,\ \text{c'est absurde.}
\end{aligned}$$

Montrons à présent que $\dim(G) = n - k$. Pour cela, on utilise l'application :

$$\begin{aligned}
\phi : \mathcal{L}_f &\to vect\Gamma \\
g &\mapsto e_k^* \circ g.
\end{aligned}$$

Puisque $f^i \in \mathcal{L}_f$, alors $\phi$ est surjective.
A présent, si on a $e_k^* \circ g = 0$, on décompose $g$ : $g = a_1 Id + a_2 f + \cdots + a_p f^{p-1}$, où $p \leq k$ est le plus grand indice tel que $a_p \neq 0$.

$$\begin{aligned}
e_k^* \circ g = 0 &\Leftrightarrow a_1 e_k^* + a_2 e_k^* \circ f + \cdots + a_p e_k^* \circ f^{p-1} = 0 \\
&\Rightarrow \left(a_1 e_k^* + a_2 e_k^* \circ f + \cdots + a_p e_k^* \circ f^{p-1}\right)\left(f^{k-(p-1)}(x)\right) = 0 \\
&\Rightarrow a_p = 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $p \leq k$, $a_p = 0$, et $\phi$ est injective. Elle réalise un isomorphisme de $\mathcal{L}_f$ sur $vect\Gamma$.

$$\dim \mathcal{L}_f = k = \dim vect\Gamma,$$

$$\dim G = n - k.$$

Ainsi, $\dim F + \dim G = n$, et on obtient $E = F \oplus G$. On a donc suffisamment travaillé pour obtenir $F_1$ qui convienne : il est stable par $f$, de même que $G$. On prend $P_1 = \pi_f$ sur $F_1$, et pour tout polynôme annulateur de $f_{|G}$, il divisera $P_1$, donc la troisième condition est vérifiée. Puis on réalise une récurrence, en étudiant cette fois $G$ et $f_{|G}$. Elle termine car $\dim G < \dim E = n$.

**Theoreme : Decomposition de Frobenius. 1** *Soient $P_1, \cdots, P_r$ la suite des invariantes de similitude de $f \in \mathcal{L}(E)$ ; alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} C(P_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & C(P_r) \end{pmatrix}$$

*avec $P_1 = \pi_f$ et $P_1 \cdots P_r$ le polynôme caractéristique de $f$.*

## Démonstration

On a déjà les $F_i$ du théorème précédent ; on considère la base $\mathcal{B}_i$ de $F_i$, où $f_{|F_i}$ est cyclique, et donc la matrice de cette fonction serait $C(P_i)$. Puis on écrit $f$ dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_r)$.

# 3 Application.

Pas de référence, ça se fait à la main !

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique : $\chi_f = (1-X)^3(2-X)^2$.
Polynôme minimal : $\pi_f = (1-X)(2-X)^2$.
Donc $P_1 = \pi_f = X^3 - 3X^2 + 6X - 4$. On choisit $x_1 = e_3 + e_4 + e_5$. On trouve $f(x)$, $f^2(x)$. $F_1 = Vect\{x_1, f(x), f^2(x)\}$.
Ensuite, $F_2 = Vect\{x_2 = e_2\}$ et $F_3 = Vect\{x_3 = e_3\}$. On obtient les matrices de passage :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en calculant à la main l'inverse. On obtient une matrice de trois blocs diagonaux :

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & & \\ 1 & 0 & -8 & & \\ 0 & 1 & 5 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

# Développement : Décomposition de Dunford.

Frédéric Valet

27 septembre 2014

$\mathbb{K}$ est un corps, et $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.

**Proposition 1** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur unitaire de $u$. On note $P = P_1^{\alpha_1} \cdots P_d^{\alpha_d}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $P$, et $F_i = \ker(P_i^{\alpha_i} u)$. Alors $E$ se décompose en une somme directe : $E = \bigoplus_{i=1}^d F_i$, et pour tout $i$, le projecteur $p_i$ sur $F_i$ parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ est un polynôme en $u$.*

Démonstration.
D'après le lemme des noyaux, on a la décomposition de $E$ en la somme directe des espaces vectoriels $F_i$. Il reste donc à prouver que chacun des projecteurs est un polynôme en $u$.
Notons $R_i := \prod_{j \neq i} P_j^{\alpha_j}$. Par la relation de Bézout, les polynômes $P_i$ étant irréductibles et deux à deux premiers entre eux, les polynômes $R_i$ le sont aussi, et il existe des polynômes $Q_1, \cdots, Q_d$ tels que :

$$R_1 Q_1 + \cdots + R_d Q_d = 1.$$

En appliquant le morphisme de $\mathbb{K}[X]$ à valeurs dans $\mathcal{L}(E)$ :

$$R_1(f) Q_1(f) + \cdots + R_d(f) Q_d(f) = Id.$$

Notons $p_i := R_i(f) Q_i(f)$ les endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$, et montrons que ce sont les projecteurs recherchés. Ces applications sont en tout cas bien des polynômes en $u$.
Tout d'abord, pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = R_i R_j(f) \circ Q_i Q_j(f) = 0$ car $R_i R_j | P$ le polynôme annulateur. De plus, puisque $p_1 + \cdots + p_d = Id$, on a :

$$p_i \circ p_1 + \cdots + p_i \circ p_d = p_i^2 = p_i,$$

et $p_i$ est bien un projecteur. Quel est son image ?
Soit $y \in im(p_i)$. Il existe $x \in E$ tel que $p_i(x) = y$.

$$P_i^{\alpha_i}(f)(y) = (P_i^{\alpha_i} R_i) \circ Q_i(f)(x) = Q_i \circ P(f)(x) = 0.$$

Donc $Im(p_i) \in F_i$.

Réciproquement, si $x \in F_i$, on peut le décomposer dans $E$ : $x = p_1(x) + \cdots + p_d(x)$. Cependant, certains membres sont nuls : pour $i \neq j$, $p_j(x) = Q_j \circ R_j(x) = 0$, car $P_i | R_j$. D'où $x = p_i(x)$, et $F_i \subset im(p_i)$.

Finalement, il ne reste qu'à montrer que $\ker(p_i) = \bigoplus_{i \neq j} F_j$. On a facilement que $F_j \subset \ker(p_i)$, car si $x \in F_j$, alors $P_j^{\alpha_j}(f)(x) = 0$ et en particulier $Q_i(f)(x) = 0$. Donc $x \in \ker(p_i)$.
Réciproquement, si $x \in \ker(p_i)$, alors on utilise la décomposition en somme directe :

$$x = p_1(x) + \cdots + p_{i-1}(x) + p_{i+1}(x) + \cdots + p_d(x).$$

Donc $x \in \bigoplus_{i \neq j} F_j$.

**Theoreme : Decomposition de Dunford. 1** *Soit $u$ un endomorphisme sur $E$ tel que son polynôme caractéristique $\chi_u$ soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple d'endomorphismes : $d$ diagonalisable et $n$ nilpotent, tels que $u = d + n$, et $d$ et $n$ commutent pour la composition. De plus ce sont des polynômes en $u$.*

Démonstration.

Prouvons en premier lieu l'existence d'un tel couple.
En reprenant les notations du théorème précédent, avec le polynôme annulateur $P = \chi_u = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on note $d := \sum_i \lambda_i p_i$. Par restriction à chacun des sous-espaces $F_i$, $d$ est diagonalisable, et on pose $n = u - d$. Cette deuxième application est aussi un polynôme en $u$, donc $d$ et $n$ commutent, et $n$ est bien nilpotente :

$$n^q = \left(\sum_{i=1}^{d}(u - \lambda_i)p_i\right)^q = \sum_{i=1}^{d}(u - \lambda_i)^q p_i,$$

par définitions des projecteurs. De plus, si on prend $q \geq \max_i \alpha_i$, on obtient le coefficient manquant pour retrouver le polynôme caractéristique comme facteur, et on a $n^q = 0$.

A présent, pour l'unicité : en reprenant $(d, n)$ le couple trouvé précédemment et $(d', n')$ un autre couple qui correspond aux hypothèses, alors $d - d' = n - n'$. Par hypothèse, $d$ et $n$ sont des polynômes en $u$, et $d'$ et $n'$ commutent avec $u$ ; on a la commutativité de $d'$ avec $d$ et $n$, de même pour $n'$. Finalement, $d$ et $d'$ sont codiagonalisables et $n - n'$ est nilpotente ; cela implique la nullité de $d - d'$ et $n - n'$. D'où l'unicité.