Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

153

Soit k un corps. Soit E un K-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

I - Polynômes d'endomorphismes

Les définitions et résultats qui suivent s'adaptent au cas des matrices de $M_n(k)$.

1 - L'algèbre $k[u]$

Déf 1. Soit $P = \sum_{i=0}^{d} p_i X^i \in k[X]$. On définit $P(u) := \sum_{i=0}^{d} p_i u^i \in \mathcal{L}(E)$.

Rq 2. Si $P, Q \in k[X]$, on a $PQ(u) = QP(u) = P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$

Prop 3. L'application $\varphi_u : k[X] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $P \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbres.

Déf 4. On note $k[u] := \operatorname{Im} \varphi_u$

Déf 5. Les éléments de $\operatorname{Ker} \varphi_u$ sont appelés les polynômes annulateurs de u.

Prop / Déf 6. $\operatorname{Ker} \varphi_u$ est un idéal $\neq (0)$ de $k[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire qui engendre $\operatorname{Ker} \varphi_u$. Il est appelé polynôme minimal de u et noté π_u.

Rq 7. Si $P \in k[X]$ vérifie $P(u) = 0$, alors $\pi_u \mid P$.

Ex 8. Si u est un projecteur non nul alors $\pi_u = X^2 - X$

Prop 9. $\dim k[u] = \deg \pi_u$

De plus $(id, u, u^2, \dots, u^{\deg \pi_u - 1})$ forme une base de $k[u]$

Cor 10. $k[u]$ est fermé.

Appli 11. $\exp(u) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!} \in k[u]$

Appli 12. Si $u \in GL(E)$, à l'aide d'un polynôme annulateur on peut exprimer l'inverse de u comme un polynôme en u.

Appli 13. Calcul de puissances de u. Si $P(u) = 0$, pour $N \in \mathbb{N}$:

$$u^N = \underbrace{QP(u)}_{=0} + \underset{\uparrow \text{ de } \deg < \deg P}{R(u)}$$ où (Q, R) est la division euclidienne de X^N par P.

Ex 14. u est nilpotent $\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^* \,/\, X^p$ est un polynôme annulateur de u.

Ex 15. Soit $a \in k^\times$, $b \in k$. Alors : $aX + b$ est un polynôme annulateur de u $\Leftrightarrow$ u est une homothétie de rapport $-\frac{b}{a}$

Appli 16. Test d'inversibilité : $u \in GL(E) \Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Rac}(\pi_u)$

Thm 17. (Lemme des noyaux) Si les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux, alors $\operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{n} P_i(u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} P_i(u)$. De plus, les projecteurs sur chaque composante $\operatorname{Ker} P_i(u)$ sont des polynômes en u.

Cor 18. Supposons π_u scindé : $\pi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$. On a alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} (u - \lambda_i \, id_E)^{\alpha_i}$$

2 - Éléments propres

Déf 19. Un scalaire $\lambda \in k$ est appelé une valeur propre (vp) de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\} \,/\, u(x) = \lambda x$. Un tel élément x est alors appelé un vecteur propre ($\vec{vp}$) associé à la vp λ.

Déf 20. On définit le sous-espace propre associé à λ (si λ est une vp) par $E_\lambda(u) = \{x \in E \,/\, u(x) = \lambda x\}$.

Déf 21. On note $Sp(u) := \{\lambda \in k \,/\, \lambda$ est vp de $u\}$ (appelé le spectre de u).

Prop 22. Si P est un polynôme annulateur de u alors $Sp(u) \subset \operatorname{Rac}(P)$.

Ex 23. Si u est nilpotent, alors $Sp(u) \subset \{0\}$

Si s est une symétrie, alors $Sp(s) \subset \{-1, 1\}$

Rq 24. A priori on n'a pas $\operatorname{Rac}(P) \subset Sp(u)$.

Ex 25. $X^2 - X$ annule id alors que $0 \notin Sp(id) = \{1\}$

Prop 26. $\operatorname{Rac}(\pi_u) = Sp(u)$

Ex 27. Si u est un projecteur non nul, $Sp(u) = \{0, 1\}$

Déf 28. On définit le polynôme caractéristique de u comme

$$\chi_u := \det(u - X \cdot id_E)$$

Rq 29. χ_u est un polynôme de degré n tel que

$$\chi_u(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in Sp(u)$$

Appli 30. Si k est algébriquement clos, tout endomorphisme a au moins une vp.

Thm 31. (Cayley - Hamilton) $\chi_u(u) = 0$

II - Diagonalisation et trigonalisation

1 - Diagonalisation

Déf 32. u est dit diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.

Thm 33. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) u est diagonalisable.

(ii) il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

(iii) π_u est scindé à racines simples.

(iv) χ_u est scindé et pour toute vp λ, $\dim E_\lambda(u) = m_{\chi_u}(\lambda)$, où $m_{\chi_u}(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ dans χ_u.

Appli 34. Calcul des termes d'une suite récurrente

$Y_{n+1} = A Y_n \quad \rightsquigarrow \quad Y_n = A^n Y_0$

si $A = PDP^{-1}$ on a $A^n = P D^n P^{-1}$ (rapide à calculer)

Utilisable pour des suites du type $y_{n+1} = a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p}$

Appli 35. Calcul d'exponentielle

Si $A = PDP^{-1}$ on a $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$

et si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ on a $\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$

Utile pour résoudre des systèmes différentiels du type $Y' = AY$ car la solution générale est $Y_0 \exp(tA)$.

Ex 36. Si car$(k) \neq 2$ les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Contre-ex 37. Si u est nilpotent non nul il ne peut être diagonalisable.

Ex 38. Si $k = \mathbb{F}_q$, u est diagonalisable $\iff$ $X^q - X$ est un polynôme annulateur de u

Prop 39. Soit F un sev de E stable par u. Alors u est diagonalisable $\Rightarrow$ $u|_F$ est diagonalisable

Lemme 40. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ / $uv = vu$. Alors :

(i) Tout sous-espace propre de u est stable par v.

(ii) $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

Prop 41. Si u et v sont diagonalisables et commutent, alors il existe une base commune de diagonalisation.
(u et v sont alors dits codiagonalisables)

Appli 42. $\exp : H_n(\mathbb{C}) \xrightarrow[\text{homéo}]{\sim} H_n^{++}(\mathbb{C})$ $\boxed{\text{DEV 1}}$
via réduction des matrices hermitiennes

2 - Trigonalisation

Déf 43. u est dit trigonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Ex 44. Les matrices triangulaires inférieures sont trigonalisables.

Thm 45. u est trigonalisable $\iff$ χ_u est scindé sur k

Appli 46. Système différentiel linéaire à coefficient constant.

$Y' = AY \qquad A = PTP^{-1}$ si χ_A scindé or $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$

ainsi $(P^{-1}Y)' = T(P^{-1}Y)$ résolution par remontée possible

Rq 47. Si k est algébriquement clos, alors tout endomorphisme de E est trigonalisable. C'est le cas si $k = \mathbb{C}$.

Prop 48. Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ sont trigonalisables et commutent, alors il existe une base commune de trigonalisation.
(u et v sont alors dits cotrigonalisables)

III - Réductions plus fines

1 - Décomposition de Dunford $\boxed{\text{DEV 2}}$

Thm 49. (Décomposition de Dunford)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur k. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$, appelé la décomposition de Dunford de u, tel que :

(i) d est diagonalisable et n est nilpotent.

(ii) $u = d + n$.

(iii) n et d commutent.

De plus, d et n sont des polynômes en u.

Appli 50. L'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Appli 51. u est diagonalisable $\iff$ $\exp(u)$ est diagonalisable

2 - Réduction de Jordan

Déf 52. Un bloc de Jordan est une matrice carrée du type

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_m(k)$$

Thm 53. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors, il existe une famille d'entiers $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_p$ et une base B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & & \\ & J_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_p} \end{pmatrix}$$

De plus, s'il existe d'autres entiers $m_1 \geq \dots \geq m_q$ et B' une base telle que

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} J_{m_1} & & & \\ & J_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{m_q} \end{pmatrix}$$

alors $\begin{cases} q = p \\ \forall i, \quad m_i = n_i \end{cases}$

Cor 54. (Réduction de Jordan)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur k.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les vp (deux à deux distinctes) de u.
Il existe des suites $m_{j,1} \geq \dots \geq m_{j,p_j}$ pour $j \in [\![1,m]\!]$ et une base B de E telles que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_{1,1}} + J_{m_{1,1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 I_{m_{1,p_1}} + J_{m_{1,p_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m I_{m_{m,1}} + J_{m_{m,1}} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m I_{m_{m,p_m}} + J_{m_{m,p_m}} \end{pmatrix}$$

3 – Réduction de Frobenius

Approche différente de ce qui précède : ici on cherche des sous-espaces stables par u sur lesquels l'endomorphisme induit est cyclique.

Déf 55. On dit que u est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E_x = E$, où $E_x := \{ P(u)(x),\ P \in k[X] \}$

Déf 56. Soit $P = X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \dots + a_0 \in k[X]$. On appelle matrice compagnon de P la matrice

$$\mathcal{C}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -a_{p-2} \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix} \in M_p(k)$$

Prop 57. $\chi_{\mathcal{C}(P)} = P$

Prop 58. (Caractérisation d'un endomorphisme cyclique)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(i) u est cyclique
(ii) $(-1)^n \chi_u = \pi_u$
(iii) $\deg(\pi_u) = n$
(iv) il existe une base B de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \mathcal{C}(Q)$ pour un certain $Q \in k[X]$
(v) $\dim(k[u]) = n$

Thm 59. (Réduction de Frobenius)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe une base B de E et des polynômes $P_r \mid P_{r-1} \mid \dots \mid P_1$ tels que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(P_r) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{C}(P_1) \end{pmatrix}$$

De plus ces P_i sont uniques. On les appelle les invariants de similitude de u.

Remarque 60. Contrairement aux autres réductions, la réduction de Frobenius est définie sans condition sur u.

Remarque 61. On a $\pi_u = P_1$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^{r} P_i$

Prop 62. u et v sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude.

Appli 63. Soit l extension de corps commutative de k. Si $A \in M_n(k)$ et $B \in M_n(k)$ sont semblables sur $M_n(l)$, alors elles le sont aussi sur $M_n(k)$.

Appli 64. Si le commutant de u est $k[u]$ alors u est cyclique.

(F) parler du commutant et du bicommutant.

Références

Leçon

- *Objectif Agrégation*, V. Beck, J. Malick et G. Peyré
- *Algèbre*, X. Gourdon
- *Algèbre linéaire – Réduction des endomorphismes*, R. Mansuy
- *Algèbre linéaire*, J. Grifone

DEV 1

- *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, A. Mneimné et F. Testard
- *Algèbre linéaire*, J. Grifone (réduction des endomorphismes auto-adjoints)

DEV 2

- *Algèbre*, X. Gourdon

Homéomorphisme entre $H_n(\mathbb{C})$ et $H_n^{++}(\mathbb{C})$

Réduction des endomorphismes normaux

Références

- *Algèbre linéaire*, J. Grifone
- *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, R. Mneimné et F. Testard

Déf 1. Un endomorphisme u d'un espace hermitien est dit autoadjoint (ou hermitien) si $u^* = u$
ie si $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$

Remarque 2. Si $(e_i)_i$ est une base orthonormée de E et $A = \mathrm{Mat}_{(e_i)_i}(u)$, on a
$$u = u^* \iff A = A^*$$
où $A^* = {}^t\bar{A}$ ("transconjuguée")

Prop 3. Si u est un endomorphisme hermitien, $Sp(u) \subset \mathbb{R}$.

dem

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda x$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{On a} & \langle u(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2 \\ \text{et} & \langle u(x), x \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 \end{array}\right\} \text{ d'où } \lambda = \bar{\lambda}$$
□

Déf 4. Un endomorphisme u d'un espace hermitien est dit normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$.

Exemples. Matrices symétriques réelles, antisymétriques réelles, hermitiennes, orthogonales, unitaires.

Thm 5

Soit u un endomorphisme normal d'un espace hermitien.
Alors u est diagonalisable et les sous-espaces propres sont deux-à-deux orthogonaux.

dem

Récurrence sur $n = \dim E$.

. $n = 1$: OK.
. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $n-1$.
Soit $\lambda \in Sp(u)$. $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$

NB : $\dim E_\lambda^\perp \leq n-1$

* Stabilité de $E_\lambda^\perp$ (stabilité de la décomposition)

. E_λ est stable par u^* : Soit $x \in E_\lambda$. On a $u \circ u^*(x) = u^* \circ u(x) = \lambda u^*(x)$
D'où $u^*(x) \in E_\lambda$.

. Soit $y \in E_\lambda^\perp$. On a, pour tout $x \in E_\lambda$
$\langle u(y), x \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = 0$ car $y \in E_\lambda^\perp$ et $u^*(x) \in E_\lambda$
donc $u(y) \in E_\lambda^\perp$.

* $u|_{E_\lambda^\perp}$ est normal
on note que $E_\lambda^\perp$ est stable par u^*.

On a $\langle u(x), u(y) \rangle \overset{u \text{ est normal}}{=} \langle u^*(x), u^*(y) \rangle$

Puis par stabilité $\langle u(x), u(y) \rangle_{E_\lambda^\perp} = \langle u^*(x), u^*(y) \rangle_{E_\lambda^\perp}$ $\forall x, y \in E_\lambda^\perp$

Par HR, $u|_{E_\lambda^\perp}$ est donc diagonalisable et les sous-espaces propres sont $\perp$

Comme $E_\lambda \overset{\perp}{\oplus} E_\lambda^\perp$ on obtient le résultat voulu. $\square$

CCL En appliquant la Prop 3 et le Thm 5 et en considérant les résultats correspondants dans le cadre matriciel, on obtient :

Si $A \in H_n(\mathbb{C})$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $U \in U_n(\mathbb{C})$ tels que

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^*$$

Décomposition de Dunford

Référence : Algèbre, Gourdon

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé sur k. Alors il existe un unique couple $(d, n) \in \mathcal{L}(E)^2$, appelé la décomposition de Dunford de u, tel que :

(i) d est diagonalisable et n est nilpotent.

(ii) $u = d + n$.

(iii) n et d commutent.

De plus : $d, n \in k[u]$.

dem

① Décomposition de E en sous-espaces caractéristiques et projecteurs associés

Notons $\chi_u = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$

Notons $N_i := \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\, id)^{\alpha_i}$

Par le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

Pour $i \in [\![1, s]\!]$, on pose $Q_i := \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)^{\alpha_j}$

Les Q_i sont mutuellement premiers entre eux. Le théorème de Bézout donne alors :

$\exists U_1, \dots, U_s \in k[X]$, $U_1 Q_1 + \dots + U_s Q_s = 1$

→ qui donne $id_E = U_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + U_s(u) \circ Q_s(u)$

Notons $P_i = U_i Q_i$ et $p_i := P_i(u)$. Cela donne $\boxed{id_E = \sum_{i=1}^{s} p_i}$ (*)

$\forall j \neq i$, $\chi_u \mid Q_i Q_j$ et donc $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(u) \circ U_i U_j(u) = 0$ (**)

Par (*) on obtient : $\forall i$, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$ et donc par (**), $p_i = p_i^2$

Les p_i sont donc des projecteurs.

→ $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$:

Soit $y = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$. Alors $(u - \lambda_i\, id)^{\alpha_i}(y) = [X - \lambda_i]^{\alpha_i}(u) \circ P_i(u) \overset{(x)}{=} U_i(u) \circ \chi_u(u)(x) = 0$

D'où $\mathrm{Im}(p_i) \subset N_i$

Soit $x \in N_i$. Par (*) $x = p_1(x) + \dots + p_s(x)$

Or $\forall j \neq i$, $p_j(x) = U_j(u) \circ Q_j(u)(x) = 0$ car $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} \mid Q_j$ donc $x = p_i(x) \in \mathrm{Im}(p_i)$

D'où $N_i \subset \mathrm{Im}(p_i)$.

→ $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} N_j$:

$\forall j \neq i$, $N_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$ car si $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(u) \circ Q_i(u)(x) = 0$ car $(X - \lambda_j)^{\alpha_j} \mid Q_i$

Ainsi $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \mathrm{Ker}(p_i)$

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p_i)$. Par (*), $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$ donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$, d'où $\mathrm{Ker}(p_i) \subset \bigoplus_{j \neq i} N_j$

CCL : $\forall i$, p_i est la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$

et p_i est un polynôme en u.

② Existence

On pose $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i\, p_i$ (clairement diagonalisable)

$n = f - d = \sum_{i=1}^{s} (u - \lambda_i\, id_E)\, p_i$

En utilisant le fait que $\begin{cases} \text{les } p_i \text{ sont des projecteurs} \\ p_i \circ p_j = 0 \quad \forall i \neq j \\ p_i \circ u = u \circ p_i \quad (\text{car } p_i \in k[u]) \end{cases}$.

on obtient (par récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$)

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad n^q = \sum_{i=1}^{r} (u - \lambda_i \, id_E)^q \, p_i$$

or, avec $q = \max_i \alpha_i$ cela donne $(u - \lambda_i \, id_E)^q \, p_i = \left[(X-\lambda_i)^q P_i \right](u) = 0$ car $\chi_u \mid (X-\lambda_i)^q P_i$

d'où $n^q = 0$

Ainsi construits, d et n sont des polynômes en u vérifiant (i), (ii) (et (iii)).

(3) Unicité

Soit (d', n') un autre couple vérifiant (i), (ii) et (iii).

Alors d' et n' commutent avec $d' + n' = u$, et donc avec d et n car ces derniers sont des polynômes en u.

Ainsi d et d' sont codiagonalisables.

Donc $d - d'$ est diagonalisable.

Or $d - d' = n' - n$ est nilpotente. Donc $Sp(d - d') = \{0\}$.

D'où $d - d' = n' - n = 0$. $\square$

Exponentielle d'une matrice hermitienne.

Th. exp réalise un homéomorphisme de H sur HDP

① Si $A \in H$, on a bien $\exp A \in HDP$.

② Surjectivité : Soit $A \in HDP$, $A = U \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} U^{-1}$ avec

U unitaire et $d_i > 0$, $\forall i \geq 1$.

Comme les $d_i > 0$, $A = \exp B$ où $B = U \begin{pmatrix} \log d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \log d_n \end{pmatrix} U^{-1}$.

B est bien hermitienne.

③ Injectivité : H_1, H_2 deux matrices hermitiennes tq $\exp H_1 = \exp H_2$.

Les valeurs propres de H_1 et H_2 sont réelles et ont même exponentielle elles sont donc égales.

$\Rightarrow$ Pour mq $H_1 = H_2$, il suffit de mq H_1 et H_2 sont codiagonalisables

H_1 commute avec $\exp H_1$ donc avec $\exp H_2$. Or H_2 est un polynôme en $\exp H_2$, donc H_1 et H_2 commutent.

Comme H_1 et H_2 sont diagonalisables, elles sont codiagonalisables (et $H_1 =$

④ Continuité : exp est continue en tant que série normalement converg de fonctions continues.

⑤ Bicontinuité : Soit $A \in HDP$, $B \in H$ et (A_p) une suite de HDP (B_p) H

$A_p = \exp(B_p)$, $\forall p$ et $A = \exp B$

On suppose que $A_p \xrightarrow[p \to \infty]{} A$. On veut mq $B_p \xrightarrow[p \to \infty]{} B$. Pour cel on mq (B_p) est bornée (1) et admet au plus une valeur d'adhérence

$$\boxed{\text{Lemme : Soit } A \in H, \text{ alors } \|A\|_2 = \rho(A)}$$

① La suite (A_p) cvge vers A donc est bornée et $\forall p$, les vp de A_p sont :

Or $\rho(A_p) = \|A_p\|_2$ (lemme) donc les vp de A_p sont bornées

De même, la suite (A_p) cvge vers A donc les vp des A_p sont bornées. On en déduit que les vp des matrices A_p sont contenues dans un compact de $]0,+\infty[$. En considérant l'image par le logarithme de ces vp, on obtient que les vp des matrices B_p sont bornées.
De plus, $\rho(B_p) = \|B_p\|_2$ (lemme), donc (B_p) est bornée.

② Soit $B_0 \in H$ une valeur d'adhérence de (B_p), alors par cvgce de (A_p) vers A, $\exp(B_0) = \exp(B)$ et donc $B = B_0$ par l'injectivité prouvée précédemment.
La suite (B_p) est donc bornée et admet B comme unique valeur d'adhérence donc cvge vers B. $\boxtimes$

<u>Preuve du lemme</u> : Soit A une matrice hermitienne. Alors A est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ désignent les vp de A et si $X = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ de norme 1, on a :

$$\|AX\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 |\lambda_k|^2 \leq \rho(A)^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = \rho(A)^2$$

donc $\|A\|_2 \leq \rho(A)$.

Soit k tq $\rho(A) = |\lambda_k|$, alors $\rho(A) = |\lambda_k| = \|Ae_k\|_2$, d'où
$\|A\|_2 = \rho(A)$. $\boxtimes$